VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM VŨ KHUÊ - TRẦN HỮU NAM

BÀI TẬP HÌNH HỌC

NÂNG CAO

10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM VŨ KHUÊ - TRẦN HỮU NAM

BÀI TẬP HÌNH HỌC NÂNG CAO 10

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01 - 2011/CXB/851 - 1235/GD Mã số : NB004T1

Lời nói đầu

Đây là cuốn sách bài tập dùng cho học sinh học theo chương trình Toán nâng cao lớp 10.

Các bài tập trong sách được sắp xếp theo các chương, mục của Sách giáo khoa Hình học 10 Nâng cao.

Phần lớn các bài tập trong sách nhằm củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh theo mục tiêu của chương trình và SGK Hình học 10 nâng cao ; những bài tập này tương tự như các bài tập trong SGK. Vì vậy, học sinh làm được các bài tập đó sẽ có định hướng để giải các bài tập trong SGK. Ngoài ra còn có một số bài tập dành cho học sinh khá, giỏi.

Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm. Mỗi bài có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Nhiệm vụ của học sinh là tìm ra phương án đúng đó.

Các tác giả chân thành cảm ơn nhóm biên tập của ban Toán, Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội đã giúp đỡ rất nhiều để hoàn thiện cuốn sách này.

Các tác giả

Chương I. VECTƠ

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1, §2, §3 : Vectơ, tổng và hiệu của hai vectơ

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các định nghĩa : Vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, vectơ - không, độ dài vectơ, hai vectơ bằng nhau.

2. Định nghĩa tổng của hai vectơ, vectơ đối của một vectơ, hiệu của hai vectơ. Các tính chất về tổng và hiệu của hai vectơ.

3. Các quy tắc :

Quy tắc ba điểm : Với ba điểm A, B, C tuỳ ý, ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Quy tắc hình bình hành : Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Quy tắc về hiệu hai vectơ : Cho hai điểm A, B thì với mọi điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

II – ĐỀ BÀI

1. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Có hay không một vectơ cùng phương với hai vectơ đó ?

2. Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng A, B, C. Trong trường hợp nào hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ? Trong trường hợp nào hai vectơ đó ngược hướng ?

3. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vectơ trong chúng có cùng hướng.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC và B' là điểm đối xứng với B qua tâm O. Hãy so sánh các vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{HC}$.

5. Chứng minh rằng với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

6. Cho tam giác OAB. Giả sử $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON}$. Khi nào điểm M nằm trên đường phân giác của góc AOB ? Khi nào điểm N nằm trên đường phân giác ngoài của góc AOB ?

7. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng

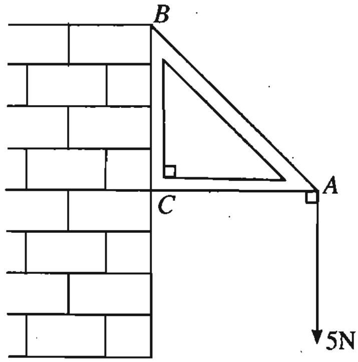
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

Hãy phát biểu bài toán trong trường hợp n–giác đều.

8. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, B' là điểm đối xứng với C qua B, C' là điểm đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng với một điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

9. Một giá đỡ được gắn vào tường như hình 1. Tam giác ABC vuông cân ở đỉnh C. Người ta treo vào điểm A một vật nặng 5N. Hỏi có những lực nào tác động vào bức tường tại hai điểm B và C ?



Hình 1

10. Cho n điểm trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}.$$

§4. Tích của một vectơ với một số

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa tích của vectơ với một số và các tính chất.

2. Tính chất của trung điểm :

– Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

– Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm O ta có

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

3. Tính chất của trọng tâm tam giác :

– Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

– Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm O ta có

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

4. Điều kiện để hai vectơ cùng phương : Điều kiện cần và đủ để vectơ $\vec{b}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *là có một số k sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$.

Điều kiện để ba điểm thẳng hàng : Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$ *cùng phương.*

5. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương :

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$*. Khi đó với vectơ* $\vec{x}$ *bất kì, luôn có cặp số duy nhất m và n sao cho* $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

II – ĐỀ BÀI

11. Cho ba điểm O, M, N và số k. Lấy các điểm M' và N' sao cho

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}.$$

Chứng minh rằng $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

12. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Hãy phát biểu điều kiện cần và đủ để hai vectơ không cùng phương.

13. Cho ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ có độ dài bằng nhau và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tính các góc AOB, BOC, COA.

14. Chứng minh rằng với ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, luôn luôn có ba số α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

15. Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Chứng minh rằng nếu có một điểm I và một số t nào đó sao cho $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ thì với mọi điểm I', ta có

$$\overrightarrow{I'A} = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}.$$

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

16. Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

a) Xét vị trí của điểm M đối với hai điểm A, B trong các trường hợp :

$$k \leq 0 \; ; \; 0 < k < 1 \; ; \; k > 1 \; ; \; k = -1.$$

b) Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$ và $k \neq 0$) thì M chia đoạn thẳng BA theo tỉ số nào ?

c) Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$ và $k \neq 0$) thì A chia đoạn thẳng MB theo tỉ số nào ? B chia đoạn thẳng MA theo tỉ số nào ?

d) Chứng minh rằng : Nếu điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì với điểm O bất kì, ta luôn có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}.$$

17. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo cùng tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

18. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ.

Chứng minh rằng $IJ \parallel AE$ và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

19. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỉ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1). Chứng minh rằng

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (*Định lí Mê-nê-la-uýt*) ;

b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (*Định lí Xê-va*).

20. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) Nếu ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì ba điểm A_2, B_2, C_2 cũng thế ;

b) Nếu ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy hoặc song song thì ba đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 cũng thế.

21. Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua I, lần lượt cắt hai đường thẳng CA và CB tại A' và B'. Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và $A'B$ nằm trên một đường thẳng cố định.

22. Cho điểm O nằm trong hình bình hành $ABCD$. Các đường thẳng đi qua O và song song với các cạnh của hình bình hành lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q. Gọi E là giao điểm của BQ và DM, F là giao điểm của BP và DN. Tìm điều kiện để E, F, O thẳng hàng.

23. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EA. Chứng minh rằng hai tam giác MPE và NQR có cùng trọng tâm.

24. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$;

b) Hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm.

25. Cho hai điểm phân biệt A, B.

a) Hãy xác định các điểm P, Q, R, biết :

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \;;\quad -2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \;;\quad \overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0}.$$

b) Với điểm O bất kì và với ba điểm P, Q, R ở câu a), chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} \;;\quad \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \;;\quad \overrightarrow{OR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}.$$

26. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\,\overrightarrow{OB}$.

Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB ?

27. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

28. Cho tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Lấy các điểm A' và B' sao cho $\overrightarrow{CA'} = m\vec{a}$; $\overrightarrow{CB'} = n\vec{b}$. Gọi I là giao điểm của $A'B$ và $B'A$. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

29. Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho $FG // AC$. Chứng minh rằng hai tam giác ADE và BFG có diện tích bằng nhau.

30. Cho hình thang $ABCD$ với các cạnh đáy là AB và CD (các cạnh bên không song song). Chứng minh rằng nếu cho trước một điểm M nằm giữa hai điểm A, D thì có một điểm N nằm trên cạnh BC sao cho $AN // MC$ và $DN // MB$.

31. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm A', B', C' sao cho

$$\overrightarrow{A'B} = -2\overrightarrow{A'C};\ \overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A}\ ;\ \overrightarrow{C'A} = -2\overrightarrow{C'B}.$$

Đoạn thẳng AA' cắt các đoạn BB' và CC' lần lượt tại M và N, hai đoạn BB' và CC' cắt nhau tại P.

a) So sánh các đoạn thẳng AM, MN, NA'.

b) So sánh diện tích hai tam giác ABC và MNP.

32. Cho tam giác ABC và ba vectơ cố định $\vec{u}$, $\vec{v}, \vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

33. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định các điểm G, P, Q, R, S sao cho :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}$; $5\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì và với các điểm G, P, Q, R, S ở câu a), chứng minh rằng :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OS} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

34. Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn luôn tìm được ba số α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$. Nếu điểm M trùng với trọng tâm tam giác ABC thì các số α, β, γ bằng bao nhiêu ?

35. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

36. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tuỳ ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

37. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{CM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

38. Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

39. Cho ba dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác ABC_1, BCA_1 và CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

40. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ mà $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \neq 0$.

a) Chứng minh rằng có duy nhất một điểm G sao cho

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm* A_i, *gắn với các hệ số* k_i. Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau (và do đó có thể xem các k_i đều bằng 1), thì G *gọi là trọng tâm của hệ điểm* A_i.

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với mọi điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}\right).$$

41. Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và Δ' là tam giác có ba đỉnh là

ba điểm còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau, các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' luôn đi qua một điểm cố định.

42. Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.

§5. Trục toạ độ và hệ trục toạ độ

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa về trục toạ độ, toạ độ của vectơ và của điểm trên một trục. Độ dài đại số của vectơ trên trục.

2. Định nghĩa hệ trục toạ độ, toạ độ của vectơ và của điểm đối với hệ trục toạ độ. Mối liên hệ giữa toạ độ của vectơ và toạ độ các điểm đầu và điểm cuối của nó.

3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ : Phép cộng, phép trừ vectơ và phép nhân vectơ với số.

4. Toạ độ của trung điểm đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác.

II – ĐỀ BÀI

43. Cho các điểm A, B, C trên trục Ox như hình 2.



Hình 2

a) Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

b) Tính $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB} + \overline{CB}$, $\overline{BA} - \overline{BC}$, $\overline{AB}.\overline{BA}$.

44. Trên trục $(O;\vec{i})$ cho hai điểm M và N có toạ độ lần lượt là -5 và 3. Tìm toạ độ điểm P trên trục sao cho $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = -\dfrac{1}{2}$.

45. Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm A, B, C có toạ độ lần lượt là -4, -5, 3. Tìm toạ độ điểm M trên trục sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Sau đó tính $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ và $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$.

46. Cho a, b, c, d theo thứ tự là toạ độ của các điểm A, B, C, D trên trục Ox.

a) Chứng minh rằng khi $a + b \neq c + d$ thì luôn tìm được điểm M sao cho

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}.$$

b) Khi AB và CD có cùng trung điểm thì điểm M ở câu a) có xác định không ?

Áp dụng. Xác định toạ độ điểm M nếu biết :

$$a = -2, \quad b = 5, \quad c = 3, \quad d = -1.$$

Các bài tập từ 47 đến 52 được xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy

47. Cho các vectơ $\vec{a}(1;2), \vec{b}(-3;1), \vec{c}(-4;-2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ

$$\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}\ ;\ \vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\ ;\ \vec{w} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$$

và xem vectơ nào trong các vectơ đó cùng phương với vectơ $\vec{i}$, cùng phương với vectơ $\vec{j}$.

b) Tìm các số m, n sao cho $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

48. Cho ba điểm $A(2 ; 5)$, $B(1 ; 1)$, $C(3 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm toạ độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành. Tìm toạ độ tâm hình bình hành đó.

49. Biết $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$, $P(x_3 ; y_3)$ là các trung điểm ba cạnh của một tam giác. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

50. Cho ba điểm $A(0 ; -4)$, $B(-5 ; 6)$, $C(3 ; 2)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng ;

b) Tìm toạ độ trọng tâm tam giác ABC.

51. Cho tam giác ABC có $A(-1 ; 1)$, $B(5 ; -3)$, đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm toạ độ đỉnh C.

52. Cho hai điểm phân biệt $A(x_A\ ;\ y_A)$ và $B(x_B\ ;\ y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}\quad (k \neq 1)$. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$$

Bài tập ôn tập chương I

53. Tam giác ABC là tam giác gì nếu nó thoả mãn một trong các điều kiện sau đây ?

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

b) Vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

54. Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau đây ?

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$.

b) $\overrightarrow{DB} = m\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

55. Cho G là trọng tâm tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy hai điểm M và N sao cho $AM = MN = NB$.

a) Chứng tỏ rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC.

b) Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy biểu thị các vectơ sau đây qua $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GM}, \overrightarrow{CN}$.

56. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho :

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

57. Cho tam giác ABC, với mỗi số k ta xác định các điểm A', B' sao cho $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{CA}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C$.

58. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(4\ ;\ 0)$, $B(2\ ;\ -2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M. Trong ba điểm A, B, M, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại.

Các bài tập trắc nghiệm chương I

1. Cho tam giác đều ABC có cạnh a. Độ dài của tổng hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?

(A) $2a$; (B) a ; (C) $a\sqrt{3}$; (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Độ dài của tổng hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?

(A) $a\sqrt{2}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $2a$; (D) a.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3$, $AC = 4$. Vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng bao nhiêu ?

(A) 2 ; (B) $2\sqrt{13}$; (C) 4 ; (D) $\sqrt{13}$.

4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a, H là trung điểm của cạnh BC. Vectơ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}$ có độ dài bằng bao nhiêu ?

(A) $\dfrac{a}{2}$; (B) $\dfrac{3a}{2}$; (C) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; (D) $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

5. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tổng hai vectơ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu ?

(A) 2 ; (B) $2\sqrt{3}$; (C) 8 ; (D) 4.

6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào **sai** ?

(A) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; (B) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$;

(C) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; (D) $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

7. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào **sai** ?

(A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CF}$; (B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE}$;

(C) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$; (D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD}$.

8. Cho tam giác ABC và điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ như sau :

(A) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$; (B) $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$;

(C) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$; (D) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

9. Cho tam giác ABC và I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ như sau :

(A) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$; (B) $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$;

(C) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$; (D) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

10. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ như sau :

(A) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$; (B) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$;

(C) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$; (D) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

11. Cho G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ như sau :

(A) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$; (B) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2(\vec{a} + \vec{b})}{3}$;

(C) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$; (D) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2(\vec{a} - \vec{b})}{3}$.

12. Trong hệ toạ độ Oxy cho các điểm $A(1 ; -2)$, $B(0 ; 3)$; $C(-3 ; 4)$, $D(-1 ; 8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho là ba điểm thẳng hàng ?

(A) A, B, C ; (B) B, C, D ; (C) A, B, D ; (D) A, C, D.

13. Trong hệ toạ độ Oxy cho ba điểm $A(1 ; 3)$, $B(-3 ; 4)$ và $G(0 ; 3)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

(A) $(2 ; 2)$; (B) $(2 ; -2)$; (C) $(2 ; 0)$; (D) $(0 ; 2)$.

14. Trong hệ toạ độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$, biết $A = (1 ; 3)$, $B = (-2 ; 0)$, $C = (2 ; -1)$. Hãy tìm toạ độ điểm D.

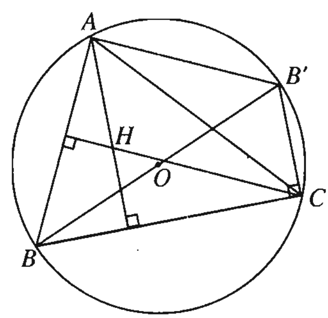
(A) $(2 ; 2)$; (B) $(5 ; 2)$; (C) $(4 ; -1)$; (D) $(2 ; 5)$.

B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1, §2, §3 : Vectơ, tổng và hiệu của hai vectơ

1. Có. Đó là vectơ-không.

2. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng khi A không nằm giữa B và C, ngược hướng khi A nằm giữa B và C.



Hình 3

3. Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. Vậy có ít nhất một cặp vectơ cùng hướng.

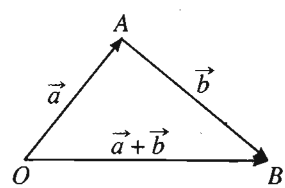
4. (h. 3) Hãy chứng tỏ rằng $AHCB'$ là hình bình hành.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

5. (h. 4) Từ điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác OAB ta có :

$$OA - AB < OB < OA + AB$$

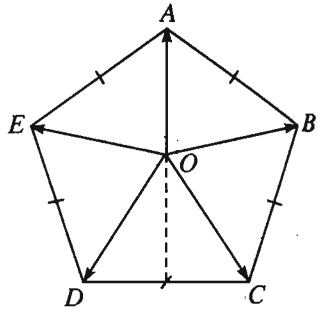
hay là $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.



Hình 4

6. Theo quy tắc hình bình hành, vectơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nằm trên đường chéo của hình bình hành có hai cạnh là OA và OB. Vậy OM nằm trên đường phân giác của góc AOB khi và chỉ khi hình bình hành đó là hình thoi, tức là $OA = OB$. Ta có $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ nên $\overrightarrow{ON}$ nằm trên đường phân giác ngoài của góc AOB khi và chỉ khi $ON \perp OM$ hay $BA \perp OM$, tức là $OAMB$ là hình thoi, hay $OA = OB$.

7. (h. 5)



Hình 5

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.

Ta có thể viết :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Vì OA là phân giác của góc BOE và $OB = OE$ nên tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ là một vectơ nằm trên đường thẳng OA.

Tương tự, vectơ tổng $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ là một vectơ cũng nằm trên đường thẳng OA. Vậy $\vec{u}$ là một vectơ nằm trên đường thẳng OA. Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có $\vec{u}$ cũng là một vectơ nằm trên đường thẳng OB. Từ đó suy ra $\vec{u}$ phải là vectơ - không : $\vec{u} = \vec{0}$.

Một cách tổng quát, ta có thể chứng minh mệnh đề :

Nếu $A_1A_2....A_n$ là n - giác đều tâm O thì $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

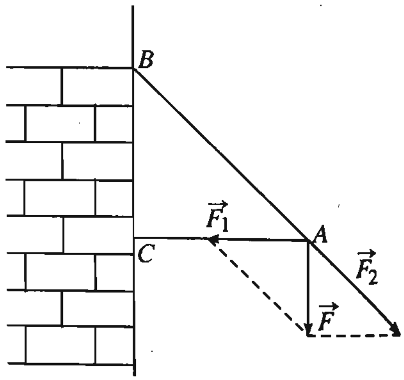
8. Ta có :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C}$

$= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.



Hình 6

9. (h. 6) Tại điểm A có lực kéo $\vec{F}$ hướng thẳng đứng xuống dưới với cường độ 5N. Ta có thể xem $\vec{F}$ là tổng của hai

vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng AC và AB. Dễ dàng thấy rằng

$$\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\vec{F}\right| \text{ và } \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\vec{F}\right|\sqrt{2}.$$

Vậy, có một lực ép vuông góc với bức tường tại điểm C với cường độ 5N, và một lực kéo bức tường tại điểm B theo hướng $\overrightarrow{BA}$ với cường độ $5\sqrt{2}$ N.

10. Lấy một điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OB_n} - \overrightarrow{OA_n}$$
$$= \left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + ... + \overrightarrow{OB_n}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).$$

Vì n điểm $B_1, B_2,..., B_n$ cũng là n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ nhưng được kí hiệu một cách khác, cho nên ta có

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + ... + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}.$$

Suy ra $\quad \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}.$

§4. Tích của một vectơ với một số

11. Ta có $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$.

12. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ với $m \neq 0$, ta có $\vec{a} = -\dfrac{n}{m}\vec{b}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì có thể viết $m\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$ với $m \neq 0$.

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì có số m sao cho $\vec{b} = m\vec{a}$ tức là $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$, trong đó $n = -1 \neq 0$.

Vậy điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương là nếu $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ thì $m = n = 0$.

13. Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ có độ dài bằng nhau nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lại vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ nên O là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra ABC là tam giác đều. Vậy các góc AOB, BOC, COA đều bằng 120°.

14. • Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$. Khi đó có thể viết $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, với $\alpha = m$, $\beta = n$, $\gamma = 0$.

• Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương thì có các số α, β sao cho $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, hay có thể viết $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ với $\gamma = -1$.

15. a) Theo giả thiết : $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$, thì với mọi điểm I', ta có

$$\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'A} = t\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'B}\right) + (1-t)\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'C}\right) = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{II'}.$$

Suy ra $\overrightarrow{I'A} = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}$.

b) Nếu ta chọn I' trùng với A thì có $\vec{0} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$, đó là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

16. a) Nếu $k \leq 0$ thì M nằm giữa A và B, hoặc trùng với A.

Nếu $0 < k < 1$ thì A nằm giữa M và B.

Nếu $k > 1$ thì B nằm giữa A và M.

Nếu $k = -1$ thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Theo giả thiết : $k \neq 0$ và $k \neq 1$, ta có

M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow$ M chia đoạn thẳng BA theo tỉ số $\dfrac{1}{k}$.

c) • M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)$ hay $\overrightarrow{AM} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ A chia đoạn thẳng MB theo tỉ số $\dfrac{k}{k-1}$.

• M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ B chia đoạn thẳng MA theo tỉ số $\dfrac{1}{1-k}$.

d) M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$ (trong đó O là điểm bất kì)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

17. Gọi G là trọng tâm tam giác MNP thì ta có

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB}}{1-k} + \frac{\overrightarrow{GB} - k\overrightarrow{GC}}{1-k} + \frac{\overrightarrow{GC} - k\overrightarrow{GA}}{1-k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm tam giác ABC.

18. (h. 7) Ta có

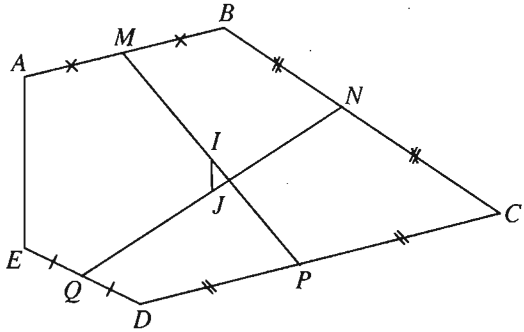
$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN}$$

$$= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN}$$

$$= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$



Hình 7

Vậy $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Suy ra $IJ // AE$ và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

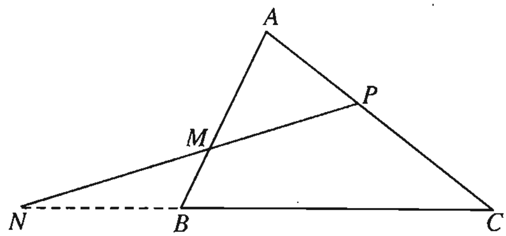
19. a) (h. 8)

Lấy một điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB}}{1-m};$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC}}{1-n};$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA}}{1-p}.$$



Hình 8

Để đơn giản tính toán, ta chọn điểm O trùng với điểm C.

Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}; \ \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n}; \ \overrightarrow{CP} = \frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}. \qquad (1).$$

Từ hai đẳng thức cuối của (1), ta có :

$$\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

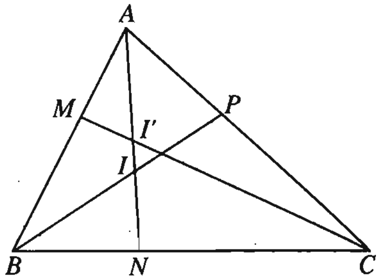
và thay vào đẳng thức đầu của (1), ta được :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}.$$

Từ bài toán 15b) ta suy ra điều kiện cần và đủ để ba điểm M, N, P thẳng hàng là :

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-m} = 1 \Leftrightarrow p-1-pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1.$$

b) (h. 9)



Hình 9

Giả sử AN cắt BP tại I và giả sử I chia đoạn thẳng AN theo tỉ số x. Như vậy ba điểm P, I, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác CAN. Ta có P chia đoạn thẳng CA theo tỉ số p, I chia đoạn AN theo tỉ số x, B chia đoạn NC theo tỉ số $\frac{n}{n-1}$ (suy từ giả thiết N chia đoạn BC theo tỉ số n). Vậy theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có

$$p.x.\frac{n}{n-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{n-1}{np}.$$

Giả sử AN cắt CM tại I', và I' chia AN theo tỉ số x'. Như vậy ba điểm I', C, M thẳng hàng và lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác ANB. Ta có : I' chia đoạn AN theo tỉ số x', C chia đoạn NB theo tỉ số $\frac{1}{1-n}$, M chia đoạn BA theo tỉ số $\frac{1}{m}$. Vậy áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt, ta có :

$$x' \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow x' = m(1-n).$$

Ba đường thẳng AN, BP, CM đồng quy khi và chỉ khi I trùng I' hay $x = x'$, có nghĩa là :

$$\frac{n-1}{np} = m(1-n) \Leftrightarrow mnp = -1.$$

+) Xét trường hợp AN và BP song song (h. 10). Ta có :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{1-n}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \ ;$$

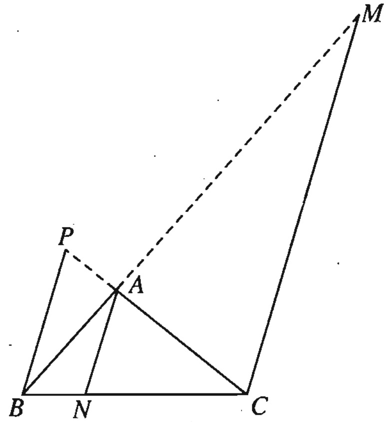
$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB} = \frac{p}{p-1}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1-m}\overrightarrow{CA} - \frac{m}{1-m}\overrightarrow{CB}.$$

Do $AN \,//\, BP$ nên

$$\frac{1}{1-n} : (-1) = -1 : \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{1-n} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Leftrightarrow p = (1-n)(p-1) \Leftrightarrow np = n-1. \qquad (*)$$



Hình 10

Khi đó điều kiện cần và đủ để AN, BP và CM song song với nhau là $\overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$. Vì $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}$, nên $\overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{1-n} : (-m) = -1 \Leftrightarrow m(n-1) = -1.$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra $mnp = -1$.

20. Ta gọi k, l, m là các số sao cho $\overrightarrow{A_1B} = k\overrightarrow{A_1C}$; $\overrightarrow{B_1C} = l\overrightarrow{B_1A}$; $\overrightarrow{C_1A} = m\overrightarrow{C_1B}$.

Chú ý rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt đối xứng với ba điểm A_2, B_2, C_2 qua trung điểm đoạn thẳng BC, CA, AB nên ta có

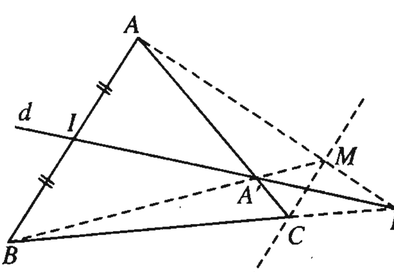
$$\overrightarrow{A_2C} = k\overrightarrow{A_2B}, \quad \overrightarrow{B_2A} = l\overrightarrow{B_2C} \ ; \quad \overrightarrow{C_2B} = m\overrightarrow{C_2A}.$$

Từ đó bằng cách áp dụng định lí thuận và đảo của định lí Mê-nê-la-uýt (hoặc Xê-va) ta chứng minh được câu a) (hoặc câu b)).

21. (h. 11)

Đặt $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$.

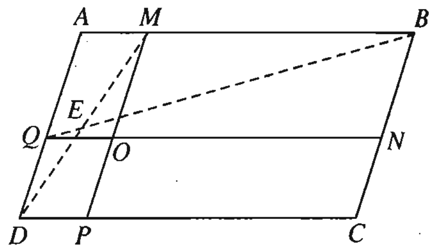
Xét tam giác ABB' với ba đường đồng quy là AC, BM và $B'I$ (đồng quy tại A'). Vì



Hình 11

$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ nên theo định lí Xê-va, ta có $-mn = -1$ hay $mn = 1$. Từ $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$ ta suy ra $m\overrightarrow{MB'} = mn\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}$. Vậy ta có $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$ và $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB'}$, điều này chứng tỏ rằng $CM // AB$. Vậy điểm M luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua C và song song với AB.

22. (h. 12) Xét tam giác ABQ và ba điểm thẳng hàng M, E, D. Giả sử M chia AB theo tỉ số m, E chia BQ theo tỉ số n và D chia QA theo tỉ số p, theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có $mnp = 1$.



Hình 12

Xét tam giác QNB và ba điểm O, E, C. Khi đó O chia QN theo tỉ số m, C chia NB theo tỉ số n và E chia BQ theo tỉ số p. Vì $mnp = 1$ nên ba điểm O, E, C thẳng hàng.

Cũng chứng minh tương tự, ta có ba điểm F, O, A thẳng hàng. Vậy để ba điểm E, O, F thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là năm điểm A, C, E, F, O thẳng hàng, hay điểm O phải nằm trên đường chéo AC của hình bình hành đã cho.

23. (h. 13) Với điểm G bất kì ta có :

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + \overrightarrow{GE}$$

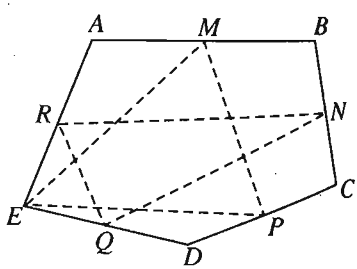
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GA})$$

$$= \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}.$$

Vậy $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

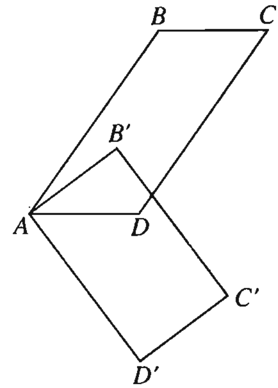
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}.$$

Suy ra trọng tâm hai tam giác MPE và NQR trùng nhau.



Hình 13

24. (h. 14)



Hình 14

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'}$

$= \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD}$

$= \left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right) - \overrightarrow{AC'} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Với điểm G bất kì ta có

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD}$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{D'D}$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \left(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}\right)$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'}$.

Suy ra : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$.

Vậy trọng tâm hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ trùng nhau.

25. a) • $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + 3\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

• $-2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BA}$.

• $\overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA} - 3\left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) • $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) + 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$;

• $-2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$;

• $\overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OR}\right) - 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OR}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$.

26. Ta có : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M \in d$.

Vì $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \le \alpha \le 1$.

27. Lấy hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ thì theo bài 26, ta có $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$ khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng AB.

28. Vì I nằm trên $A'B$ và AB' nên có các số x và y sao cho :

$$\overrightarrow{CI} = x\overrightarrow{CA'} + (1-x)\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{CA} + (1-y)\overrightarrow{CB'}$$

hay $x.m\vec{a} + (1-x)\vec{b} = y\vec{a} + (1-y)n\vec{b}$.

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên từ đẳng thức cuối cùng ta suy ra :

$mx = y$ và $(1-x) = n(1-y)$. Từ đó ta có $1 - x = n(1-mx) = n - mnx$

hay $x = \dfrac{1-n}{1-mn}$.

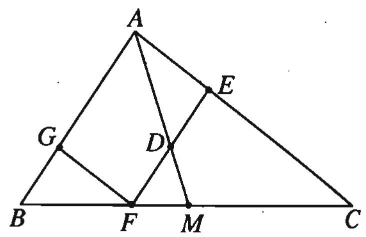
Vậy $\overrightarrow{CI} = \dfrac{m(1-n)}{1-mn}\vec{a} + \left(1 - \dfrac{1-n}{1-mn}\right)\vec{b} = \dfrac{m(1-n)}{1-mn}\vec{a} + \dfrac{n(1-m)}{1-mn}\vec{b}$.

29. (h. 15)

Ta đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}; \overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\vec{b}}{2}$.

Vì E nằm trên đoạn thẳng AC nên có số k sao cho $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$, với $0 < k < 1$. Khi đó $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB} = k\vec{b}$.

Điểm D nằm trên AM và EF nên có hai số x và y sao cho



Hình 15

$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CA} + (1-x)\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{CE} + (1-y)\overrightarrow{CF}$$

hay
$$x\vec{a} + \frac{1-x}{2}\vec{b} = ky\vec{a} + k(1-y)\vec{b}.$$

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên $x = ky$ và $\dfrac{1-x}{2} = k(1-y)$. Suy ra $x = 2k - 1$, do đó $\overrightarrow{CD} = (2k-1)\vec{a} + (1-k)\vec{b}$.

Ta có :

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} = (2k-1)\vec{a} + (1-k)\vec{b} - k\vec{a} = (1-k)(\vec{b} - \vec{a}) = (1-k)\overrightarrow{AB}$.

Chú ý rằng vì $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB}$ nên $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{AB}$, suy ra $(1-k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$.

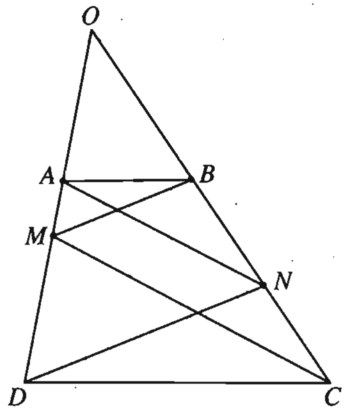
Do đó $ED = GB$. Như vậy, hai tam giác ADE và BFG có các cạnh đáy ED và GB bằng nhau, chiều cao bằng nhau (bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song) nên có diện tích bằng nhau.

30. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC (h. 16).

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OD} = k\vec{a}$, khi đó $\overrightarrow{OC} = k\vec{b}$ (vì $AB \parallel DC$). Giả sử $\overrightarrow{OM} = m\vec{a}$. Ta xác định điểm N trên BC sao cho $AN \parallel CM$. Ta chứng minh rằng $DN \parallel BM$.

Vì N nằm trên BC nên $\overrightarrow{ON} = n\vec{b}$. Khi đó

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = n\vec{b} - \vec{a}.$$



Hình 16

Mặt khác $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = m\vec{a} - k\vec{b}$.

Vì $AN \parallel CM$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CM}$ cùng phương, tức là $\dfrac{n}{-k} = \dfrac{-1}{m}$

hay $n = \dfrac{k}{m}\cdot$ Vậy $\overrightarrow{ON} = \dfrac{k}{m}\vec{b}$. Từ đó $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OD} = \dfrac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}$. Lại có

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = m\vec{a} - \vec{b} = -\frac{m}{k}\left(\frac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}\right) = -\frac{m}{k}\overrightarrow{DN}.$$

Vậy $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ cùng phương, hay $DN \parallel BM$.

31. (h. 17)

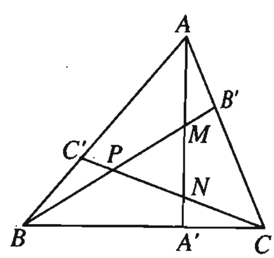
a) Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{CA'} = \frac{\overrightarrow{CB}}{3} = \frac{\vec{b}}{3}; \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2\vec{a}}{3};$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}.$$

Vì M là giao điểm của AA' và BB' nên có các số x và y sao cho :

$$\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CA} + (1 - x)\overrightarrow{CA'} = y\overrightarrow{CB} + (1 - y)\overrightarrow{CB'},$$



Hình 17

hay : $x\vec{a} + (1-x)\dfrac{\vec{b}}{3} = y\vec{b} + (1-y)\dfrac{2\vec{a}}{3}\cdot$

Vì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên từ đẳng thức trên ta suy ra

$$x = \frac{2(1-y)}{3} \text{ và } y = \frac{1-x}{3}.$$

Giải ra ta được : $x = \dfrac{4}{7}$ và $y = \dfrac{1}{7}\cdot$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{CM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{CA'} \Rightarrow \frac{4}{7}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{MA'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{MA'}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{7}AA'\ ;$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{CB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{CB'} \Rightarrow \frac{1}{7}\overrightarrow{MB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{MB'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -6\overrightarrow{MB'}$$

$$\Rightarrow MB' = \frac{1}{7}BB'.$$

Tương tự, với $MB' = \dfrac{1}{7}BB'$ ta cũng có $NA' = \dfrac{1}{7}AA'$.

Vì $AM = \dfrac{3}{7}AA'$ nên $MN = \dfrac{3}{7}AA'$.

Tóm lại, ta có $AM = MN = 3NA'$.

Tương tự : $BP = PM = 3MB'$ và $CN = NP = 3PC'$.

b) Gọi S là diện tích tam giác ABC. Từ giả thiết ta suy ra $AB' = \dfrac{1}{3}AC$, $CA' = \dfrac{1}{3}CB$, $BC' = \dfrac{1}{3}BA$.

Vậy ta có : $S_{ABB'} = S_{BCC'} = S_{CAA'} = \dfrac{1}{3}S$.

Trong tam giác ABB', ta có $MB' = \dfrac{1}{7}BB'$ nên $S_{AB'M} = \dfrac{1}{7}S_{ABB'} = \dfrac{1}{21}S$.

Tương tự : $S_{AB'M} = S_{BC'P} = S_{CA'N} = \dfrac{1}{21}S$.

Từ đó suy ra

$$S_{MNP} = S_{ABC} - S_{ABB'} - S_{BCC'} - S_{CAA'} + S_{AB'M} + S_{BC'P} + S_{CA'N}$$

$$= S - 3.\frac{S}{3} + 3.\frac{1}{21}S = \frac{1}{7}S.$$

Vậy $S_{ABC} = 7S_{MNP}$.

32. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$$
$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$$
$$= t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} = t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).$$

Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ cố định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$.

Suy ra nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G, còn nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

33. a) • $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC.

• $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PD} = \vec{0}$ (D là trung điểm của cạnh BC). Vậy P là trung điểm của trung tuyến AD.

• $\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + 2\left(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{QE} + 4\overrightarrow{QD} = \vec{0}$

(E là trung điểm của AB, D là trung điểm của BC) $\Leftrightarrow \overrightarrow{QE} + 2\left(\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{ED}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$.

• $\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{RC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BA}$.

• $5\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{SA} - 2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) *Hướng dẫn :* Xuất phát từ câu a), hãy viết mỗi vectơ thành hiệu hai vectơ có điểm đầu là O.

34. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương nên ta có các số α và β sao cho $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, hay là $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + \beta\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$.

Vậy : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$.

Đặt $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ thì $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

Nếu M trùng G thì ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Vậy $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

35. Với mọi điểm O ta có :

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} + 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OM}$.

Ta chọn điểm O sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

(Chú ý rằng nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}$ $= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$. Bởi vậy để $\vec{v} = \vec{0}$, ta chọn điểm O sao cho $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$). Khi đó $\vec{u} = -4\overrightarrow{OM}$ và do đó $|\vec{u}| = 4OM$. Độ dài vectơ $\vec{u}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4OM$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

36. (h. 18) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có :

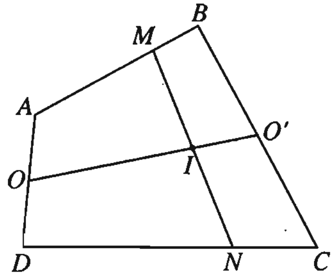
$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Vì O và I là trung điểm của AD và MN nên :

$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}\right)$

$= \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = k\overrightarrow{OO'}$.

Vậy khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.



Hình 18

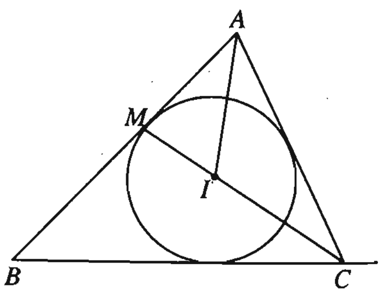
37. (h. 19)

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$\frac{AM}{BM} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$, suy ra $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1 + \frac{b}{a}}$

$= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.



Hình 19

b) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM. Bởi vậy theo câu a), ta có thể biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{AC}{AC + AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC + AM}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{b + \dfrac{bc}{a+b}} \cdot \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{\dfrac{bc}{a+b}}{b + \dfrac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right) + \frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right).$$

Suy ra :

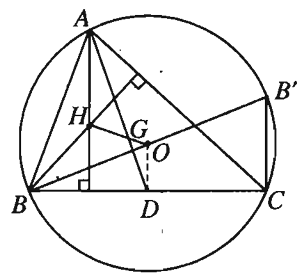
$$\left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

38. (h. 20)

a) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O, ta có $B'C \perp BC$. Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$. Vậy $AH \parallel B'C$.

Chứng minh tương tự ta có $CH \parallel B'A$.

Vậy $AB'CH$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$. Gọi D là trung điểm của BC thì OD là đường trung bình của tam giác $BB'C$ nên $\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OD}$. Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$.



Hình 20

Từ đó, ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$

Suy ra : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{HO} + 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Kết hợp với kết quả của câu a), ta có :

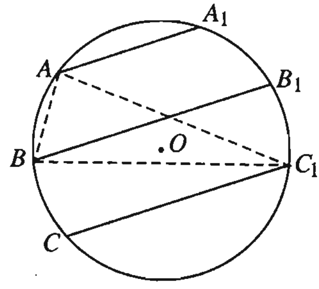
$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO}.$$

39. (h. 21) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1. Theo kết quả bài 38, ta có :

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1};$$

$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1};$$

$$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}.$$



Hình 21

Suy ra :

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1},$$
$$\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1}.$$

Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ có cùng phương. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

40. a) Ta lấy một điểm O nào đó thì :

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}\right).$$

Vậy điểm G hoàn toàn xác định và duy nhất.

b) Suy từ câu a).

41. Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và D, E, F là ba đỉnh của tam giác Δ'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác Δ và Δ' thì với điểm I tuỳ ý, ta có :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = 3\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'}\right).$$

Bởi vậy nếu chọn I là trọng tâm của hệ điểm A, B, C, D, E, F, tức là trọng tâm của hệ sáu điểm đã cho, thì I là điểm cố định và $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'} = \vec{0}$. Vậy các đường thẳng GG' luôn đi qua điểm I cố định (I là trung điểm của đoạn thẳng GG').

42. Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và DE là đoạn thẳng θ. Gọi G là trọng tâm tam giác Δ và M là trung điểm của DE thì với điểm I tuỳ ý, ta có :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IM}.$$

Bởi vậy nếu chọn I là trọng tâm của hệ điểm A, B, C, D, E, tức là trọng tâm của hệ năm điểm đã cho thì I là điểm cố định và $3\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IM} = \vec{0}$. Vậy các đường thẳng GM luôn luôn đi qua điểm I cố định (và I là điểm chia đoạn thẳng GM theo tỉ số $-\frac{2}{3}$).

§5. Trục toạ độ và hệ trục toạ độ

43. a) A, B, C có toạ độ lần lượt là 2 ; 4 ; –3.

b) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 4 - 2 = 2$, $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -7$,

$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = 5$;

$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} - \overline{BC} = 2 + 7 = 9$;

$\overline{BA} - \overline{BC} = -\overline{AB} - \overline{BC} = -2 + 7 = 5$ (hoặc $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA} = 5$) ;

$\overline{AB}.\overline{BA} = -\overline{AB}^2 = -4$.

44. $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overline{PM} = -\overline{PN} \Leftrightarrow 2\left(\overline{OM} - \overline{OP}\right) = -\left(\overline{ON} - \overline{OP}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OP} = \dfrac{1}{3}\left(2\overline{OM} + \overline{ON}\right) = \dfrac{1}{3}[2.(-5) + 3] = -\dfrac{7}{3}$.

Vậy điểm P có toạ độ là $-\dfrac{7}{3}$.

45. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right) = \dfrac{1}{3}(-4 - 5 + 3) = -2$.

Vậy M có toạ độ là – 2. Khi đó :

$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = -4 + 2 = -2$, $\overline{MB} = -3$, $\overline{MC} = 5$.

Suy ra $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{3}{5}$.

46. a) $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$

$\Leftrightarrow \left(\overline{OA} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OM}\right) = \left(\overline{OC} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OD} - \overline{OM}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\left(\overline{OD} + \overline{OC} - \overline{OA} - \overline{OB}\right) = \overline{OC}.\overline{OD} - \overline{OA}.\overline{OB}$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\left(d + c - a - b\right) = cd - ab.$ (*)

Do $a + b \neq c + d$ nên $\overline{OM} = \dfrac{cd - ab}{d + c - a - b}$.

b) Giả sử AB và CD có cùng trung điểm I. Khi đó

$$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}\quad\left(=\overline{OI}\right),$$

hay $a+b=c+d$. Khi đó $ab\neq cd$ (vì nếu $ab=cd$ và $a+b=c+d$ thì dễ dàng suy ra bốn điểm A, B, C, D không phân biệt). Vậy từ (*) ta suy ra điểm M không xác định.

Áp dụng : Với $a=-2,\ b=5,\ c=3,\ d=-1$, ta thấy $a+b\neq c+d$. Theo câu a), điểm M được xác định và ta có

$$\overline{OM}=\frac{cd-ab}{d+c-a-b}=\frac{3.(-1)-(-2).5}{-1+3+2-5}=-7.$$

Suy ra điểm M có toạ độ là -7.

47. a) $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=(2.1-3.(-3)+(-4)\,;\,2.2-3.1+(-2))=(7\,;-1)$.

$$\vec{v}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}=\left(0\,;-\frac{2}{3}\right).$$

$$\vec{w}=3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}=(-19\,;0).$$

Hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{j}$ cùng phương, hai vectơ $\vec{w}$ và $\vec{i}$ cùng phương.

b) $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}-3m-4n=1\\ m-2n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{5}\\ n=-\dfrac{7}{10}.\end{cases}$

48. a) Giả sử $D=(x\,;y)$. Khi đó

$\overrightarrow{AB}=(-1\,;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1\,;-2)$;

$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3.(-1)-2.1\\ y-5=3.(-4)-2.(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-3.\end{cases}$

Vậy $D=(-3\,;-3)$.

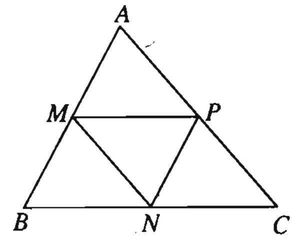
b) Giả sử $E=(x\,;y)$. Từ $ABCE$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$, do đó

$\begin{cases}x-2=2\\ y-5=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=7\end{cases}$. Vậy $E=(4\,;7)$.

Tâm I của hình bình hành cũng là trung điểm của AC nên :

$$I = \left(\frac{2+3}{2} ; \frac{5+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} ; 4\right).$$

49. (h. 22) Giả sử tam giác ABC nhận M, N, P là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Ta có



Hình 22

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NP}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = x_P - x_N \\ y_A - y_M = y_P - y_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_1 + x_3 - x_2 \\ y_A = y_1 + y_3 - y_2. \end{cases}$$

Suy ra $A = (x_1 + x_3 - x_2 ; y_1 + y_3 - y_2)$.

Tương tự ta tính được :

$B = (x_1 + x_2 - x_3 ; y_1 + y_2 - y_3)$, $C = (x_2 + x_3 - x_1 ; y_2 + y_3 - y_1)$.

50. a) $\overrightarrow{AB} = (-5 ; 10)$; $\overrightarrow{AC} = (3 ; 6)$. Do $-\frac{5}{3} \neq \frac{10}{6}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng.

b) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là :

$$G = \left(\frac{0-5+3}{3} ; \frac{-4+6+2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right).$$

51. $G(x_G ; 0) \in Ox,\ C(0 ; y_C) \in Oy \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1+5+0}{3} \\ 0 = \dfrac{1-3+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{4}{3} \\ y_C = 2. \end{cases}$

Vậy $G = \left(\frac{4}{3} ; 0\right)$, $C = (0 ; 2)$.

52. $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases} \quad (k \neq 1).$

Khi $k = -1$ thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$, M là trung điểm của AB.

Bài tập ôn tập chương I

53. a) Gọi M là trung điểm của BC thì từ giả thiết suy ra $2AM = BC$. Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b) Từ giả thiết, ta có :

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = 0.$$

Vậy tam giác ABC là tam giác cân, đáy BC.

54. a) Ta có $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

b) $\overrightarrow{DB}=m\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=m\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DC}$. Vậy $ABCD$ là hình thang.

55. a) Gọi I là trung điểm của MN thì I cũng là trung điểm của AB, do đó :

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}.$$

Suy ra $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Vậy G cũng là trọng tâm tam giác MNC.

b) $\overrightarrow{GC}=-\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}=-2\vec{a}-\vec{b}$.

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}.$$

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=2\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{4\vec{a}+5\vec{b}}{3}.$$

56. a) Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ khi và chỉ khi

$$2(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC})=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=\vec{0}.$$

Không có điểm M nào như thế.

b) Vẫn gọi I như trên thì : $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{NC})=\vec{0}$. Vậy N là trung điểm của IC.

c) $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Vậy nếu lấy D sao cho $ABCD$ là hình bình hành thì P là trung điểm của CD.

57. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC} = k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} + \vec{0}$$

$$= k\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = k\overrightarrow{BA}.$$

Từ đó suy ra quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với đường thẳng AB.

58. Giả sử $M = (0 ; y)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (-2 ; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (-4 ; y)$. Vì ba điểm A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, suy ra $y = -4$. Vậy $M = (0 ; -4)$, khi đó $\overrightarrow{AB} = (-2 ; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (-4 ; -4)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A và M.

Các bài tập trắc nghiệm chương I

1. (C)	**2.** (A)	**3.** (B)	**4.** (D)
5. (D)	**6.** (A)	**7.** (B)	**8.** (B)
9. (C)	**10.** (D)	**11.** (A)	**12.** (C)
13. (A)	**14.** (B).		

Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (Từ 0° đến 180°)

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

- *Định nghĩa các giá trị lượng giác của một góc.*
- *Dấu của các giá trị lượng giác của các góc.*
- *Liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, hai góc phụ nhau.*

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $(0^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$.

II – BÀI TẬP

1. Cho biểu thức $P = \dfrac{3\cos a + 4\sin a}{\cos a + \sin a}$.

a) Với góc a nào thì biểu thức không xác định ?

b) Tìm giá trị của P biết $\tan a = -2$.

2. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau :

a) $\cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

b) $\tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \ldots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$.

3. a) Chứng minh rằng $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $(0^\circ \le x \le 180^\circ)$.

b) Tìm $\sin x$ khi $\cos x = -\dfrac{1}{3}$.

c) Tìm $\cos x$ khi $\sin x = 0{,}3$.

d) Tìm $\cos x$ và $\sin x$ khi $\sin x - \cos x = \dfrac{2}{3}$.

4. a) Chứng minh rằng với mọi góc a khác 90°, ta có $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$.

b) Cho $\tan x = -5$, hãy tìm các giá trị lượng giác còn lại của góc x.

5. a) Chứng minh $1 + \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$ với $a \neq 0^{\circ}$ và $a \neq 180^{\circ}$.

b) Cho $\cot b = 3$, hãy tìm các giá trị lượng giác còn lại của góc b.

6. Cho biết $\sin 15^{\circ} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

a) Tính $\tan 15^{\circ}$.

b) Chứng minh $2\sin 15^{\circ}\cos 15^{\circ} = \sin 30^{\circ}$.

7. Biết $\sin x + \cos x = m$.

a) Tìm $\sin x.\cos x$.

b) Tìm $\sin^4 x + \cos^4 x$.

c) Tìm $\sin^6 x + \cos^6 x$.

d) Chứng minh rằng $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

8. Biết $\tan a + \cot a = k$.

a) Tìm $\tan^2 a + \cot^2 a$.

b) Tìm $\tan^4 a + \cot^4 a$.

c) Tìm $\tan^6 a + \cot^6 a$.

d) Chứng minh : $|k| \geq 2$.

§2. Tích vô hướng của hai vectơ

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ và các tính chất.

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng :

Nếu $\vec{u} = (x\,; y)$, $\vec{v} = (x'\,; y')$ *thì* $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

3. Độ dài của vectơ và góc giữa hai vectơ : Nếu $\vec{u}(x; y), \vec{v} = (x'; y')$ thì

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}\ (\text{với } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}).$$

II – ĐỀ BÀI

9. Tam giác ABC vuông ở A và có hai cạnh $AB = 7, AC = 10$.

a) Tìm côsin của các góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$;

b) Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tính $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

10. Cho tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5, \widehat{A} = 120^o$.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác (M là trung điểm của BC).

11. Tam giác MNP có $MN = 4$, $MP = 8$, $\widehat{M} = 60^o$. Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

12. Tam giác ABC có các cạnh $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$ và AD là phân giác của góc BAC (D thuộc cạnh BC).

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính độ dài đoạn AD.

13. Chứng minh công thức sau (với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì) :

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right).$$

14. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC.

15. Tính độ dài các đường phân giác trong và phân giác ngoài của một tam giác theo độ dài ba cạnh của tam giác đó.

16. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$. Trong trường hợp nào đẳng thức sau đây đúng : $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$?

17. Cho hai điểm cố định A, B có khoảng cách bằng a.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$.

18. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng Δ, H là hình chiếu của A trên Δ. Với mỗi điểm M trên Δ, lấy điểm N trên tia AM sao cho $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = AH^2$. Tìm tập hợp các điểm N.

19. Cho đa giác đều $A_1A_2... A_n$ nội tiếp trong đường tròn $(O ; R)$ và một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng :

a) $\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} = 0$;

b) $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2$ có giá trị không đổi.

20. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM. Xét trường hợp đặc biệt khi $k = \frac{1}{2}\cdot$

21. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Đặt

$$\vec{u} = \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BC}.$$

Chứng minh rằng

a) $\vec{u} = -abc\left(\cos B\dfrac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\dfrac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$;

b) Nếu ABC là tam giác đều thì $\vec{u} = \vec{0}$;

c) Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ thì ABC là tam giác đều.

22. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M. Gọi P là trung điểm đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng : $MP \perp BC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

23. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}\cdot$ Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

24. Cho AA' là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA')$.

25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M sao cho các góc AMB, BMC, CMA đều bằng 120^o. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt đường tròn (O) lần lượt tại A', B' và C'. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'.$$

26. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ với $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$ $(k \neq 0)$.

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm G sao cho

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

b) Tìm quỹ tích những điểm M sao cho : $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$, trong đó m là một số không đổi.

27. Cho tam giác ABC không vuông.

a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh

$$(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}.$$

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh

$$(\tan A)\overrightarrow{HA} + (\tan B)\overrightarrow{HB} + (\tan C)\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

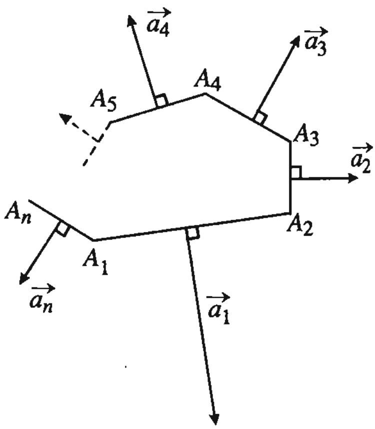
28. Cho một điểm O bất kì nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là hình chiếu của O trên A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. Đặt

$$\overrightarrow{a_1} = A_1A_2\frac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1},$$

$$\overrightarrow{a_2} = A_2A_3\frac{\overrightarrow{OB_2}}{OB_2},$$

$$\overrightarrow{a_3} = A_3A_1\frac{\overrightarrow{OB_3}}{OB_3}.$$

Chứng minh rằng $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$.



Hình 23

Chú ý. Kết quả trên đúng với đa giác $A_1A_2...A_n$ bất kì (*định lí Con Nhím*). Trên hình 23, $|\overrightarrow{a_k}| = A_kA_{k+1}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$), $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ (các vectơ $\overrightarrow{a_k}$ được gọi là các "*lông nhím*").

29. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau ở điểm M. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}.$$

30. Cho đường thẳng AB cắt đường thẳng Δ ở M và một điểm C trên Δ (C khác M). Chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (ABC) khi và chỉ khi $MC^2 = MA.MB$.

31. Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathscr{P}_{M/(O,\,R)} = \mathscr{P}_{M/(O',\,R')}$.

32. Trong đường tròn $\mathscr{C}(O\,;R)$ cho hai dây cung AA', BB' vuông góc với nhau ở điểm S và gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SM \perp A'B'$.

33. Cho điểm P cố định nằm trong đường tròn $(O\,;R)$ và hai điểm A, B chạy trên đường tròn đó sao cho góc APB luôn bằng 90^o. Gọi M là trung điểm của dây AB và H là hình chiếu của P xuống AB. Chứng minh rằng M, H luôn cùng thuộc một đường tròn cố định.

34. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và (J) là đường tròn bàng tiếp góc A(*) của tam giác. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn đó đi qua trung điểm của cạnh BC.

35. Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$ và gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy.

a) Vẽ đường tròn $(\mathscr{C})$ qua M_1, M_2, đường tròn này cắt hai cạnh Ox, Oy lần lượt ở N_1, N_2. Kẻ đường thẳng vuông góc với Ox ở N_1 và đường thẳng vuông góc với Oy ở N_2, giả sử hai đường thẳng đó cắt nhau ở N. Chứng minh $ON \perp M_1M_2$.

b) Chứng minh rằng khi $(\mathscr{C})$ thay đổi nhưng vẫn đi qua M_1 và M_2 thì điểm N luôn thuộc một tia Oz cố định và $\widehat{zOy} = \widehat{MON_1}$.

(*) Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và với phần kéo dài của các cạnh AB, AC. Tâm của đường tròn này chính là điểm đồng quy của đường phân giác trong của góc A và các đường phân giác ngoài của góc B và C.

36. Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H. (H không trùng với A và B). Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N'.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn $(\mathscr{C})$ nào đó.

b) Chứng minh rằng các đường tròn $(\mathscr{C})$ luôn đi qua hai điểm cố định.

37. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm A không thuộc đường tròn đó. Đường thẳng Δ quay quanh A cắt $(O\ ;\ R)$ ở M và N. Xác định vị trí của Δ để một trong ba điểm A, M, N cách đều hai điểm kia.

38. Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn $(\mathscr{C})$ bất kì qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau ở M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$.

39. Cho hai điểm P, Q nằm ngoài đường tròn (I) cố định với $IP \neq IQ$.

a) Vẽ đường tròn $(\mathscr{C})$ bất kì đi qua P, Q. Chứng minh rằng trục đẳng phương của $(\mathscr{C})$ và (I) đi qua một điểm cố định.

b) Hãy nêu cách vẽ đường tròn đi qua P, Q và tiếp xúc với đường tròn (I).

40. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh AB, CD kéo dài cắt nhau ở E và các cạnh AD, BC kéo dài cắt nhau ở F. Chứng minh rằng các trung điểm của các đoạn AC, BD và EF cùng thuộc một đường thẳng (*đường thẳng Gao-xơ của tứ giác*).

41. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O\ ;\ R)$, có đường cao AA'. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu của A' trên AB, AC và J là giao điểm của EF với đường kính AD.

a) Chứng minh rằng AA' là tiếp tuyến của đường tròn $(A'JD)$.

b) Tìm điều kiện của AA' để ba điểm E, F, O thẳng hàng.

42. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, B ở giữa A, C và đường thẳng Δ qua A.

a) Chứng minh rằng có hai đường tròn cùng đi qua B, C và cùng tiếp xúc với Δ.

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh A, các đường tròn đi qua B và hai tiếp điểm của Δ với hai đường tròn ở câu a) luôn đi qua một điểm cố định khác B.

43. Cho đường tròn đường kính AB có dây cung CD vuông góc với AB. Với mỗi điểm M chạy trên đường tròn đó (khác với C và D), kẻ các đường thẳng AM, BM lần lượt cắt đường thẳng CD ở J và I.

a) Chứng minh rằng từ điểm P bất kì cố định trên đường thẳng AB, có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (MIJ).

b) Kẻ các tiếp tuyến AT, AT' đến đường tròn (MIJ) (T, T' là các tiếp điểm). Chứng minh rằng T, T' luôn thuộc một đường tròn cố định.

44. Chứng minh rằng : Trong tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao cùng thuộc một đường tròn (ω) và đường tròn (ω) cũng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh với trực tâm tam giác *(đường tròn chín điểm* hay *đường tròn Ơ-le* của tam giác).

45. Trong mặt phẳng toạ độ cho $\vec{a} = (1; 2)$; $\vec{b} = (-3; 1)$; $\vec{c} = (-4; -2)$.

Tính $\vec{a}.\vec{b}$; $\vec{b}.\vec{c}$; $\vec{c}.\vec{a}$; $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$; $\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})$.

46. Cho các vectơ $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(4; 1)$.

a) Tính côsin của góc giữa mỗi cặp vectơ sau :

$\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{a}$ và $\vec{i}$; $\vec{b}$ và $\vec{j}$; $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-\vec{b}$;

b) Tìm các số k và l sao cho vectơ $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}+\vec{b}$.

c) Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$.

47. Cho hai điểm $A(-3 ; 2)$ và $B(4 ; 3)$. Tìm toạ độ của

a) Điểm M trên trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M.

b) Điểm N trên trục Oy sao cho $NA = NB$.

48. Cho ba điểm $A(-1 ; 1)$ và $B(3 ; 1)$, $C(2 ; 4)$.

a) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC ;

b) Tìm toạ độ trực tâm H, trọng tâm G và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hãy kiểm nghiệm lại hệ thức $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

49. Cho bốn điểm $A(-8 ; 0)$, $B(0 ; 4)$, $C(2 ; 0)$, $D(-3 ; -5)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

50. Biết $A(1 ; -1)$ và $B(3 ; 0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.

§3. Hệ thức lượng trong tam giác

Trong tam giác ABC ta thường kí hiệu :

- a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C.
- m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c.
- h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c.
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác, S là diện tích tam giác.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí côsin : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

2. Định lí sin : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

3. Công thức trung tuyến : $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

4. Công thức tính diện tích tam giác :

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = pr.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (công thức Hê-rông).

II – ĐỀ BÀI

51. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $a = 3$, $b = 4$, $c = 5{,}2$. Hỏi trong các kết luận sau, kết luận nào đúng ?

a) $\widehat{A}$ là góc nhọn.

b) $\widehat{B}$ là góc tù.

c) $\widehat{C}$ là góc nhọn.

d) $\widehat{C}$ là góc tù.

52. Tam giác ABC có độ dài ba cạnh a, b, c thoả mãn hệ thức $a^4 = b^4 + c^4$.

a) Chứng minh $\widehat{B} < \widehat{A}$ và $\widehat{C} < \widehat{A}$.

b) Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

53. Tính cạnh thứ ba của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 7$; $b = 10$; $\widehat{C} = 56^\circ 29'$.

b) $a = 2$; $c = 3$; $\widehat{B} = 123^\circ 17'$.

c) $b = 0{,}4$; $c = 12$; $\widehat{A} = 23^\circ 28'$.

54. Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 109$; $\widehat{B} = 33^\circ 24'$; $\widehat{C} = 66^\circ 59'$.

b) $a = 20$; $b = 13$; $\widehat{A} = 67^\circ 23'$.

55. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$; $BC = a$.

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC.

b) Chứng minh $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

56. Tam giác ABC có $c = 35$, $b = 20$, $\widehat{A} = 60^\circ$.

a) Tính chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

57. Tam giác ABC có các cạnh $AB = 3$, $AC = 7$, $BC = 8$.

a) Tính diện tích của tam giác.

b) Tính bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác.

58. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R.$$

59. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có :

a) $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

b) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.

c) $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$.

60. Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 13$, trung tuyến $AM = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính góc B.

61. Tam giác ABC có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng :

$$2\cot A = \cot B + \cot C.$$

62. Tìm quỹ tích những điểm có tổng bình phương các khoảng cách đến bốn đỉnh của một tứ giác bằng k^2 không đổi.

63. Chứng minh rằng hai trung tuyến kẻ từ B và C của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi có hệ thức sau :

$$\cot A = 2(\cot B + \cot C).$$

64. Chứng minh rằng khoảng cách d từ trọng tâm tam giác ABC đến tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó thoả mãn hệ thức

$$R^2 - d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

65. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác, khoảng cách d từ tâm đường tròn nội tiếp đến tâm đường tròn ngoại tiếp thoả mãn hệ thức

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$ *(Hệ thức Ơ-le)*

66. Cho điểm M cố định trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ và hai điểm N, P chạy trên đường tròn đó sao cho $\widehat{NMP} = 30^\circ$.

a) Tìm quỹ tích trung điểm I của NP.

b) Xác định vị trí của N, P để diện tích tam giác MNP đạt giá trị lớn nhất.

67. Kẻ các đường cao AA', BB', CC' của tam giác nhọn ABC.

a) Chứng minh rằng $B'C' = 2R\sin A\cos A$.

b) Lấy A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng với A' qua AB, AC. Chứng minh rằng chu vi tam giác $A'B'C'$ bằng độ dài đoạn thẳng A_1A_2.

c) Chứng minh hệ thức :

$$\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C = 2\sin A\sin B\sin C.$$

68. Từ một vị trí quan sát A cố định trên bờ biển, người ta muốn tính khoảng cách đến một vị trí B trên mặt biển bằng giác kế (máy đo góc). Em có thể làm việc đó bằng cách nào ?

69. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = a$, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{DBA} = \beta$, $\widehat{DAC} = \alpha'$, $\widehat{CBD} = \beta'$. Tính độ dài cạnh CD.

70. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của G trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Hãy tính diện tích của tam giác $A'B'C'$ biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng S và khoảng cách từ G đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng d, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R.

71. a) Chứng minh rằng nếu α là góc nhọn thì $\cos(\alpha + 90^o) = -\sin\alpha$.

b) Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a, b, c và diện tính S. Trên ba cạnh và về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác vuông cân $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$ (A', B', C' lần lượt là đỉnh). Chứng minh rằng :

$$A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S.$$

72. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được và có các cạnh a, b, c, d. Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau :

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, trong đó p là nửa chu vi tứ giác.

73. Cho tam giác cân có cạnh bên bằng b nội tiếp trong đường tròn $(O\ ;R)$.

a) Tính côsin của các góc của tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Với giá trị nào của b thì tam giác đó có diện tích lớn nhất ?

74. Cho tam giác ABC. Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC tính được theo công thức :

$$S = (p-a)r_a.$$

75. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng bằng r_a, r_b, r_c.

Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc A là góc vuông.

76. Cho tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến bằng 15 ; 18 ; 27.

a) Tính diện tích của tam giác.

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

77. Giải tam giác ABC biết

a) $a = 6{,}3$; $b = 6{,}3$; $\widehat{C} = 54^\circ$.

b) $a = 7$; $b = 23$; $\widehat{C} = 130^\circ$.

78. Giải tam giác ABC biết

a) $c = 14$; $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 40^\circ$.

b) $c = 35$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 120^\circ$.

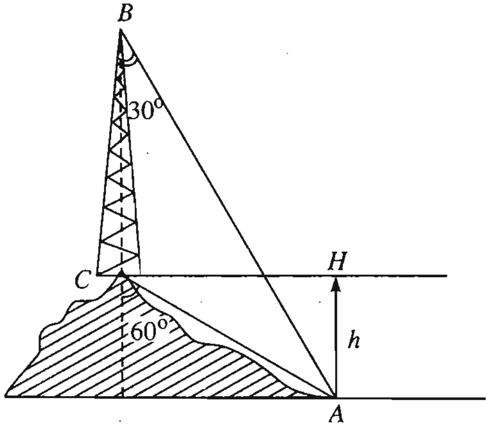
79. Giải tam giác ABC biết

a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.

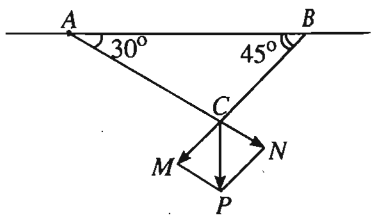
b) $a = 6$; $b = 7{,}3$; $c = 4{,}8$.

80. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 100m (h. 24). Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi.

81. Một vật nặng $P = 100$N được treo bằng sợi dây gắn trên trần nhà tại hai điểm A, B (h. 25). Biết hai đoạn dây tạo với trần nhà các góc 30° và 45°. Tính lực căng của mỗi đoạn dây.



Hình 24



Hình 25

Bài tập ôn tập chương II

82. Tìm giá trị của mỗi biểu thức sau

$A = 2\sin 30^\circ - 3\cos 45^\circ + 4\cos 60^\circ - 5\sin 120^\circ + 6\cos 150^\circ$.

$B = 3\sin^2 45^\circ - 2\cos^2 45^\circ - 4\sin^2 50^\circ - 4\cos^2 50^\circ + 5\tan 55^\circ \cot 55^\circ$.

83. Cho tam giác đều ABC có I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tìm $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BC})$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BJ})$, $\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{CI})$.

84. Cho tam giác cân có góc ở đáy bằng α. Chứng minh rằng

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

85. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB, M là trung điểm của cạnh CB.

a) Xác định trên đường thẳng AC một điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D. Tính diện tích tam giác đó.

b) Xác định trên đường thẳng AC điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M. Tính diện tích tam giác đó.

c) Tính côsin của góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD.

86. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $a = 10$, $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R.

b) Tính b, c.

87. Biết rằng tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của tam giác.

b) Tính $\tan C$.

c) Lấy điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $AD = 6$ và điểm E trên tia AC sao cho $AE = x$. Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (ADE) ((ADE) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE).

88. Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DBC} = \widehat{DCA} = \varphi$. Chứng minh rằng

a) $\sin^3\varphi = \sin(A - \varphi).\sin(B - \varphi).\sin(C - \varphi)$.

b) $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$.

89. Cho điểm M nằm trong đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ các đường thẳng MA, MB, MC, chúng cắt lại đường tròn đó lần lượt ở A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{(R^2 - MO^2)^3}{(MA.MB.MC)^2}.$$

90. Cho dây cung BC của đường tròn $\mathscr{C}(O\ ;R)$ $(BC < 2R)$.

a) Hãy dựng đường tròn tâm I tiếp xúc với OB ở B và tiếp xúc với OC ở C.

b) Với mỗi điểm M trên đường tròn (I), kẻ các đường thẳng MB và MC, chúng lần lượt cắt lại đường tròn $(\mathscr{C})$ ở B' và C'.

Chứng minh rằng $B'C'$ là đường kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

91. Trong tam giác ABC kẻ các đường cao AA', BB', CC' và gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C} = -\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}$.

b) Gọi J là một giao điểm của AA' với đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính BC.

Chứng minh rằng các đường thẳng BC, $B'C'$ và tiếp tuyến tại J của $(\mathscr{C})$ đồng quy.

Các bài tập trắc nghiệm chương II

1. $\cos 150^\circ$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\sin 120^\circ$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (C) 0,7 ; (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. (A) $\sin 91^\circ > \sin 92^\circ$; (B) $\sin 91^\circ < \sin 92^\circ$;

(C) $\sin 91^\circ = \sin 92^\circ$; (D) $\sin 92^\circ < 0$.

4. (A) $\cos 135^\circ = \cos 45^\circ$; (B) $\cos 135^\circ > \cos 45^\circ$;

(C) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$; (D) $\cos 135^\circ = 3\cos 45^\circ$.

5. Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ thì

(A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 35$; (B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 17,5$;

(C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -35$; (D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -17,5$.

6. Nếu M, N, P thẳng hàng thì

(A) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = MN.MP$; (B) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN}.\overline{MP}$;

(C) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -MN.MP$; (D) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -\overline{MN}.\overline{MP}$.

7. Trong tam giác ABC có

(A) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos A$; (B) $a^2 = b^2 + c^2 + bc\cos A$;

(C) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; (D) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.

8. Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì

(A) $\widehat{A}$ là góc tù ; (B) $\widehat{A}$ là góc vuông ;

(C) $\widehat{A}$ là góc nhọn ; (D) $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất.

9. Trong tam giác ABC có

(A) $a = 2R\cos A$; (B) $a = 2R\sin A$;

(C) $a = 2R\tan A$; (D) $a = R\sin A$.

10. Trong tam giác ABC có

(A) $m_a = \dfrac{b+c}{2}$; (B) $m_a > \dfrac{b+c}{2}$;

(C) $m_a < \dfrac{b+c}{2}$; (D) $m_a = b + c$.

B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0° đến 180°)

1. a) Biểu thức không xác định khi $\cos a + \sin a = 0$ hay $a = 135^o$.

b) Chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\cos a \neq 0$, ta tính được $P = 5$.

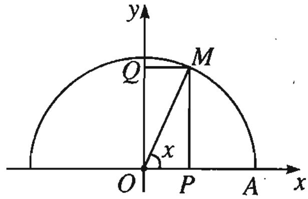
2. a) Lưu ý $\cos 0^o + \cos 180^o = \cos 20^o + \cos 160^o = ... = \cos 80^o + \cos 100^o = 0$.

b) Lưu ý $\tan 5^o.\tan 85^o = \tan 10^o.\tan 80^o = ... = \tan 45^o = 1$.

ĐS : a) 0 ; b) 1.

3. (h. 26) a) $\sin x = \overline{OQ}$, $\cos x = \overline{OP}$,

$\sin^2 x + \cos^2 x = OQ^2 + OP^2 = OM^2 = 1$.



Hình 26

b) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{0,91}$.

d) Giải hệ $\begin{cases} \sin x - \cos x = \dfrac{2}{3} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$

ĐS : $\sin x = \dfrac{\sqrt{14}+2}{6}$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{14}-2}{6}$.

4. a) $1 + \tan^2 a = 1 + \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$.

b) Áp dụng $\tan x.\cot x = 1$ để tính $\cot x$.

Áp dụng câu a) ta có $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + (-5)^2 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{26}$.

Vì $\tan x < 0$ nên $\cos x < 0$, suy ra $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Từ $\sin x = \cos x.\tan x$, hãy tính $\sin x$.

ĐS : $\cot x = -\dfrac{1}{5}$, $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin x = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

5. a) $1 + \cot^2 a = 1 + \dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \dfrac{1}{\sin^2 a}$.

b) *ĐS* : $\tan b = \frac{1}{3}$, $\sin b = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

6. a) $\cos^2 15^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{16} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16}.$$

Do $15^\circ < 90^\circ$ nên $\cos 15^\circ > 0$, suy ra $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}.$$

b) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 2\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$.

7. a) Bình phương hai vế và áp dụng bài 3a). *ĐS:* $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$.

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 + 2m^2 - m^4}{2}.$$

c) Viết lại $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$ rồi sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

ĐS : $\frac{-3m^4 + 6m^2 + 1}{4}$.

d) Từ giả thiết suy ra $\sin x = m - \cos x$. Lại có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Từ đó dẫn đến $\cos x$ là nghiệm của phương trình $2t^2 - 2mt + m^2 - 1 = 0$ nên $\Delta' \geq 0$, từ đó suy ra $m^2 \leq 2$ hay $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

8. a) $\tan^2 a + \cot^2 a = (\tan a + \cot a)^2 - 2\tan a \cot a = k^2 - 2$.

b) $\tan^4 a + \cot^4 a = (\tan^2 a + \cot^2 a)^2 - 2\tan^2 a.\cot^2 a = (k^2 - 2)^2 - 2$

$$= k^4 - 4k^2 + 2.$$

c) $\tan^6 a + \cot^6 a = (\tan^2 a + \cot^2 a)^3 - 3\tan^2 a.\cot^2 a(\tan^2 a + \cot^2 a)$

$$= (k^2 - 2)^3 - 3(k^2 - 2)$$

$$= (k^2 - 2)(k^4 - 4k^2 + 1).$$

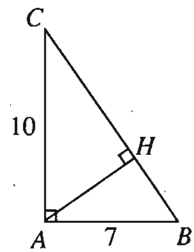
d) *Cách 1.* Do tan$a$ và cot$a$ cùng dấu nên $|\tan a + \cot a| = |\tan a| + |\cot a|$

mà $|\tan a| + |\cot a| \geq 2\sqrt{|\tan a|.|\cot a|} = 2$, suy ra $|\tan a + \cot a| \geq 2$ hay $|k| \geq 2$.

Cách 2. Thay $\cot a = \dfrac{1}{\tan a}$ dẫn đến $\tan^2 a - k\tan a + 1 = 0$. Vậy tan$a$ là nghiệm của phương trình $x^2 - kx + 1 = 0$ nên $\Delta = k^2 - 4 \geq 0$ hay $|k| \geq 2$.

§2. Tích vô hướng của hai vectơ

9. (h. 27) a) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 90^\circ$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.



Hình 27

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{ABC}$ nên

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\cos\widehat{ABC} = \frac{-7}{\sqrt{149}}.$$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \widehat{ABC}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{7}{\sqrt{149}}$.

b) $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = HB.HC\cos 180^\circ = -HB.HC = -AH^2$.

Theo hệ thức trong tam giác vuông $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{149}{4900}$,

suy ra $AH^2 = \dfrac{4900}{149}$. Vậy $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = -\dfrac{4900}{149}$.

10. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 120^\circ = -\dfrac{35}{2}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = -\frac{35}{2} - 49 = -\frac{133}{2}.$$

b) M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, suy ra

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}(49 + 25 - 35) = \frac{39}{4},$$

$$AM = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

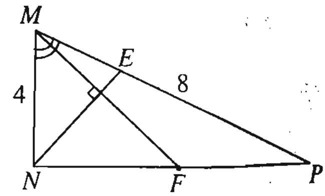
11. (h. 28) $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$,

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)$.

$NE \perp MF \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right).\left(k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}\right) = 0$

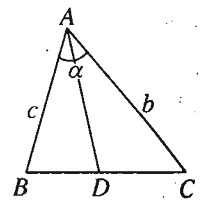
$$\Leftrightarrow k = \frac{\overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)}{\overrightarrow{MP}.\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)} = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}$$

$$= \frac{16 + 16}{64 + 16} = \frac{2}{5}.$$



Hình 28

12. (h. 29) a) Theo tính chất của đường phân giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ hay $DB = \frac{c}{b}DC$. Mặt khác $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$. Từ đó dẫn đến $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}{b + c}$.



Hình 29

b) Bình phương vô hướng để tính độ dài AD.

ĐS: $\frac{bc}{b + c}\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}$.

13. $\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}^2 - \vec{b}^2\right) = \vec{a}.\vec{b}$.

14. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - c^2 - a^2\right).$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right).$$

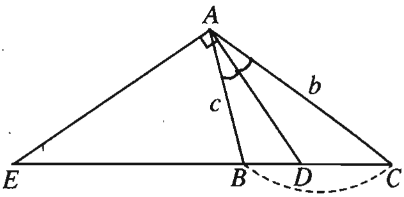
b) Vì AM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên :

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2\right) = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right).$$

Vậy : $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

15. Xét tam giác ABC có AD, AE lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài (h. 30). Theo bài 12a) ta có $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$. Hãy bình phương vô hướng cả hai vế và sử dụng đẳng thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ (theo bài 14) để tính độ dài đoạn AD. Vì AE là phân giác ngoài nên $\overrightarrow{EB} = \frac{c}{b}\overrightarrow{EC}$ (lưu ý rằng phân giác ngoài của góc A chỉ cắt đường thẳng BC khi $b \neq c$). Từ đó $\overrightarrow{AE} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}}{b-c}$.



Hình 30

ĐS: $AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$;

$AE = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$

($p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác).

16. Giả sử $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$. Nếu $\vec{a}.\vec{b} = 0$ thì $\vec{b}.\vec{c} = 0$ (vì $\vec{a} \neq \vec{0}$). Vậy cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng vuông góc với $\vec{b}$ hay $\vec{a} = k\vec{c}$. Nếu $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$ thì $\vec{b}.\vec{c} \neq 0$. Khi đó $\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{c}}\right).\vec{c}$ hay $\vec{a} = k\vec{c}$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = k\vec{c}$ thì

$(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = (k\vec{c}.\vec{b})\vec{c} = k(\vec{c}.\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}.\vec{c})k\vec{c} = (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$.

Như vậy, đẳng thức $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$ đúng khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{c}$.

17. a) Gọi O là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Với mọi điểm M, ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= MO^2 - OB^2 = MO^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Từ đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MO^2 - \frac{a^2}{4} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{4} + k.$ (*)

Ta có O cố định, $\frac{a^2}{4} + k$ là số không đổi nên :

– Nếu $k < -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M là tập rỗng.

– Nếu $k = -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M chỉ gồm một điểm O.

– Nếu $k > -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4k}$.

b) Lấy điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Từ đó có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm C.

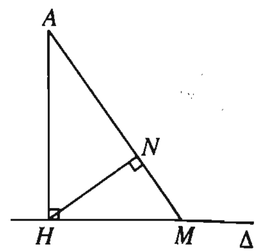
18. (h. 31) Ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM}$ (theo công thức hình chiếu)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HN}.\overrightarrow{AM} = 0.$



Vậy tập hợp các điểm N là đường tròn đường kính AH.

Hình 31

19. a) Theo định nghĩa của tích vô hướng ta có (với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$) :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA_i} = OM.OA_i.\cos\widehat{MOA_i} = R^2\cos\widehat{MOA_i}.$$

Do đó : $\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} =$

$$= \frac{1}{R^2}\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).$$

Theo bài 7 (chương I) thì $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, nên :

$$\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} = 0.$$

b) $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2 = \overrightarrow{MA_1}^2 + \overrightarrow{MA_2}^2 + ... + \overrightarrow{MA_n}^2$

$$= \left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + ... + \left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}\right)^2$$

$$= OA_1^2 + OA_2^2 + ... + OA_n^2 + nOM^2 - 2\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).\overrightarrow{OM}$$

$$= R^2 + R^2 + ... + R^2 + nR^2 - 0 = 2nR^2.$$

20. Từ điều kiện $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, ta suy ra :

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$ hay $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Bởi vậy : $AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right]^2$

$$= (1-k)^2\overrightarrow{AB}^2 + k^2\overrightarrow{AC}^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= (1-k)^2c^2 + k^2b^2 + 2k(1-k).\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) \text{ (xem bài tập 14)}$$

$$= (1-k)c^2 + kb^2 - k(1-k)a^2.$$

Trong trường hợp $k = \frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của cạnh BC, AM là đường trung tuyến. Khi đó ta có công thức trung tuyến : $AM^2 = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

21. a) $\vec{u} = ca.\cos(180^\circ - B)\overrightarrow{CA} + ab.\cos(180^\circ - C)\overrightarrow{AB} + bc.\cos(180^\circ - A)\overrightarrow{BC}$

$$= -ca\cos B.\overrightarrow{CA} - ab.\cos C.\overrightarrow{AB} - bc.\cos A.\overrightarrow{BC}$$

$$= -abc\left(\cos B\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right).$$

b) Nếu tam giác ABC đều thì $a = b = c$, $\cos A = \cos B = \cos C$, từ đó suy ra $\vec{u} = -a^2.\cos A.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$.

c) Nhân vô hướng vectơ $\vec{u} = \vec{0}$ lần lượt với $\frac{\overrightarrow{CA}}{b}$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{c}$ và $\frac{\overrightarrow{BC}}{a}$ ta có :

$\vec{u}.\frac{\overrightarrow{CA}}{b} = 0$, suy ra $\quad \cos B - 2\cos C.\cos A = 0.$

Tương tự ta có : $\quad \cos C - 2\cos A.\cos B = 0,$

$$\cos A - 2\cos B.\cos C = 0.$$

Rút cos$B$ từ đẳng thức đầu và thay vào đẳng thức thứ hai, ta có :

$\cos C - 4\cos^2 A.\cos C = 0$ mà $\cos C \neq 0$ (vì nếu cos$C$ = 0 thì cos$B$ = 0, $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^o$, vô lí) nên $\cos^2 A = \frac{1}{4}$ hay $\cos A = \pm\frac{1}{2}$. Vậy $\widehat{A} = 60^o$, hoặc $\widehat{A} = 120^o$.

Tương tự như vậy, góc C hoặc bằng 60^o hoặc bằng 120^o. Vì tổng ba góc của tam giác bằng 180^o, nên chỉ có thể có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^o$. Vậy ABC là tam giác đều.

22. (h. 32) $2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

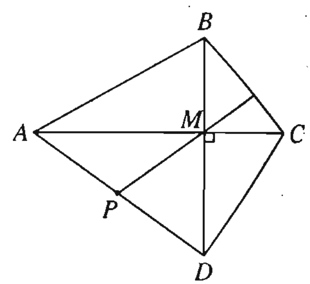
$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

(vì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = 0$ do $AC \perp BD$).

Từ đó ta có :

$MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.



Hình 32

23. Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$.

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$.

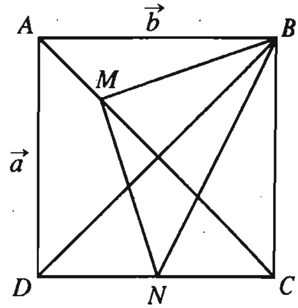
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}).$$

Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$

$$= \frac{1}{16}\left(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}\right) = 0.$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a}.\vec{b}\right) = \frac{5}{8}\vec{a}^2.$$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} + \vec{b})^2 = \frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a}.\vec{b}\right) = \frac{5}{8}\vec{a}^2.$$



Hình 33

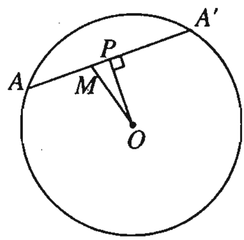
Vậy $MB \perp MN$ và $MB = MN$, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.

24. (h. 34) Gọi P là trung điểm của AA' thì $OP \perp AA'$ nên theo công thức hình chiếu ta có :

$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MP}$. Nhưng vì P là trung điểm của AA' nên $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}$. Vậy :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}) = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$$

$$= MA^2 - MA.MA' = MA(MA - MA').$$

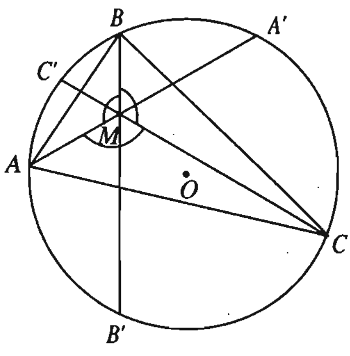


Hình 34

25. (h. 35) Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho :

$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} ; \overrightarrow{MB_1} = \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} \text{ và } \overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MC}}{MC},$$

khi đó cả ba vectơ trên đều có độ dài bằng 1, mà góc giữa hai vectơ bất kì trong chúng đều bằng 120^o nên M là tâm của tam giác đều $A_1B_1C_1$.



Hình 35

Theo bài 24, ta có :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA'),$$

suy ra $\quad 2\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\overrightarrow{MO} = MA - MA',$

hay $\quad 2\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MO} = MA - MA'.$

Tương tự : $\quad 2\overrightarrow{MB_1}.\overrightarrow{MO} = MB - MB',$

$$2\overrightarrow{MC_1}.\overrightarrow{MO} = MC - MC'.$$

Từ đó ta có $MA + MB + MC - MA' - MB' - MC'$

$$= 2\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}\right).\overrightarrow{MO} = 0,$$

hay $\quad MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'$.

26. a) Lấy một điểm O bất kì thì đẳng thức

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

tương đương với

$$k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

hay $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right)$.

Điều đó chứng tỏ rằng có điểm G thoả mãn (1).

Giả sử điểm G' cũng thoả mãn $k_1\overrightarrow{G'A_1} + k_2\overrightarrow{G'A_2} + ... + k_n\overrightarrow{G'A_n} = \vec{0}$ (2).

Bằng cách trừ theo vế (1) cho (2) ta được $k.\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ hay G' trùng với G. (Điểm G được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ gắn với các hệ số k_1, k_2, ..., k_n).

b) Với mọi điểm M, ta có

$$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1\overrightarrow{MA_1}^2 + k_2\overrightarrow{MA_2}^2 + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1\left(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + k_2\left(\overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + ... + k_n\left(\overrightarrow{GA_n} - \overrightarrow{GM}\right)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 + kGM^2 - 2\overrightarrow{GM}\left(k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n}\right) = m.$$

Ta đặt $k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 = s$ thì đẳng thức trên tương đương với $s + kGM^2 = m$ hay $GM^2 = \dfrac{m-s}{k}$. Từ đó suy ra

- Nếu $\dfrac{m-s}{k} > 0$ thì quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $r = \sqrt{\dfrac{m-s}{k}}$.

• Nếu $m - s = 0$ thì quỹ tích các điểm M là một điểm G.

• Nếu $\frac{m - s}{k} < 0$ thì quỹ tích các điểm M là tập rỗng.

Chú ý. Khi $k_1 + k_2 + ... + k_n = k = 0$ thì hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ không có tâm tỉ cự, song vectơ $\vec{u} = k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O. Thực vậy, với điểm O' khác điểm O, ta có :

$$k_1\overrightarrow{O'A_1} + k_2\overrightarrow{O'A_2} + ... + k_n\overrightarrow{O'A_n}$$

$$= (k_1 + k_2 + ... + k_n)\overrightarrow{O'O} + k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{u}.$$

Bây giờ chọn một điểm O nào đó, ta có :

$$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$$

$$\Leftrightarrow \ k_1\overrightarrow{MA_1}^2 + k_2\overrightarrow{MA_2}^2 + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}^2 = m$$

$$\Leftrightarrow \ k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow \ k_1OA_1^2 + k_2OA_2^2 + ... + k_nOA_n^2 - 2\overrightarrow{OM}.\vec{u} = m.$$

Đặt $k_1OA_1^2 + k_2OA_2^2 + ... + k_nOA_n^2 = s$ thì đẳng thức trên trở thành :

$$2\vec{u}.\overrightarrow{OM} = s - m.$$

Bởi vậy : • Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ và $s = m$ thì quỹ tích các điểm M là toàn bộ mặt phẳng.

• Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ và $s \neq m$ thì quỹ tích các điểm là tập rỗng.

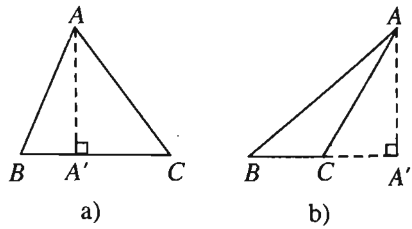
• Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm M là một đường thẳng vuông góc với vectơ $\vec{u}$.

27. a) Xét trường hợp điểm A' nằm trên cạnh BC, tức là các góc B và C đều nhọn (h. 36a). Khi đó

$$AA' = A'B.\tan B = A'C.\tan C.$$

Vì $\tan B > 0$, $\tan C > 0$ và hai vectơ $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}$ ngược hướng nên ta suy ra:

$$(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}. \quad (*)$$



Hình 36

Nếu điểm A' nằm ngoài cạnh BC, chẳng hạn điểm C nằm giữa hai điểm B và A' (h. 36b), thì khi đó góc B nhọn và góc C tù, tức là $\tan B > 0$ và $\tan C < 0$. Ta có $AA' = A'B \tan B = A'C \tan(180^o - C) = - A'C \tan C$. Trong trường hợp này hai vectơ $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}$ cùng hướng nên ta có: $(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

b) Nếu H là trực tâm tam giác ABC thì ta có các số α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho : $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (theo bài 14 chương I). Vì $HA \perp BC$, nên nhân hai vế của đẳng thức trên với $\overrightarrow{BC}$ ta được $\beta\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, và do đó (theo công thức hình chiếu)

$\beta\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left(\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (vì vectơ $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$).

So sánh đẳng thức này với (*) ta suy ra $\dfrac{\beta}{\tan B} = \dfrac{\gamma}{\tan C}$. Bằng cách tương tự ta đi đến :

$$\frac{\alpha}{\tan A} = \frac{\beta}{\tan B} = \frac{\gamma}{\tan C}.$$

Bởi vậy đẳng thức $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ trở thành :

$$\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

28. (h. 37) Ta có

$(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2}$

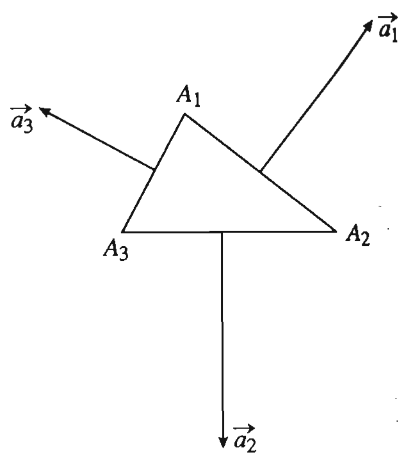
$= (\vec{a_2} + \vec{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2}$

$= \left(\vec{a_2} + \vec{a_3}\right)\left(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_2A_3}\right)$

$= \vec{a_2}.\overrightarrow{A_1A_3} - \vec{a_3}.\overrightarrow{A_2A_3}$

$= \left|\vec{a_2}\right|.A_1A_3.\cos\left(\vec{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right)$

$- \left|\vec{a_3}\right|.A_2A_3.\cos\left(\vec{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3}\right).$



Hình 37

Theo giả thiết $\left|\vec{a_2}\right| = A_2A_3$ và $\left|\vec{a_3}\right| = A_1A_3$.

Ngoài ra dễ thấy

$$\cos\left(\vec{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \cos\left(\vec{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3}\right).$$

Suy ra $\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}\right).\overrightarrow{A_1A_2}=0$. Do đó, vectơ $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_1A_2.

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có vectơ $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_2A_3.

Vậy $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}=\vec{0}$.

29. Nếu A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn $(\mathscr{C})$ thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ cũng bằng phương tích của điểm M đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

Ngược lại, vẽ đường tròn qua ba điểm A, B, C và giả sử đường tròn đó cắt đường thẳng CD ở điểm D' khác C. Khi đó ta có A, B, C, D' cùng thuộc một đường tròn nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$. Nếu có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ thì $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$, suy ra $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DD'}=0$. Do $\overrightarrow{MC}\neq\vec{0}$ và $\overrightarrow{DD'}$ cùng phương với $\overrightarrow{MC}$ nên $\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$ hay D, D' trùng nhau. Vậy A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

30. Giải tương tự như bài 29.

31. $\mathscr{P}_{M/(O,R)}=\mathscr{P}_{M/(O',R')}$

$\Leftrightarrow MO^2-R^2=MO'^2-R'^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{MO'}^2=R^2-R'^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MO'}\right).\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}\right)=R^2-R'^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{MI}=R^2-R'^2$, trong đó I là trung điểm của OO'.

Lấy H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OO', ta có

$$\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó suy ra $\overline{IH}=\dfrac{R^2-R'^2}{2\overline{OO'}}$ không đổi nên H là điểm cố định.

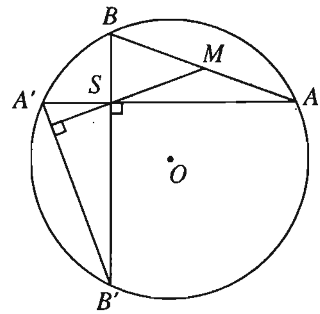
Vậy $\mathscr{P}_{M/(O,R)} = \mathscr{P}_{M/(O',R')}$ khi và chỉ khi M thuộc đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng OO' tại điểm cố định H.

Đường thẳng Δ được gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đã cho.

32. (h. 38) Xét tích vô hướng

$$\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}).(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'}).$$



Hình 38

Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} = 0$ do $SA \perp SB'$,

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'} = 0$ do $SB \perp SA'$,

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'}$.

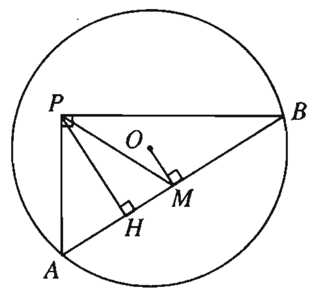
Từ đó suy ra $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = 0$, nên $SM \perp A'B'$.

33. (h. 39) Ta có $\mathscr{P}_{H/(O)} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = -HP^2$

và $\quad \mathscr{P}_{H/(O)} = HO^2 - R^2$,

suy ra $HO^2 - R^2 = -HP^2$

hay $\quad HO^2 + HP^2 = R^2. \qquad (*)$



Hình 39

Tương tự $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MB^2$

và $\quad \mathscr{P}_{M/(O)} = MO^2 - R^2$.

Mặt khác tam giác vuông APB có trung tuyến $MP = \frac{1}{2}AB = MB$.

Từ đó suy ra $MO^2 - R^2 = -MP^2$ hay $MO^2 + MP^2 = R^2. \qquad (**)$

Từ (*) và (**) ta có H, M cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của OP và bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$.

34. Đặt tên các tiếp điểm của hai đường tròn như hình 40.

Ta có $AR = AS$ và

$AR + AS = (AB + BR) + (AC + CS)$

$= (AB + BH) + (AC + CH)$

$= AB + BC + AC = 2p.$

Vậy $AR = AS = p$, suy ra

$c + BH = p$ hay $BH = p - c$.

Ta cũng có

$AP = AQ, BP = BK, CK = CQ$

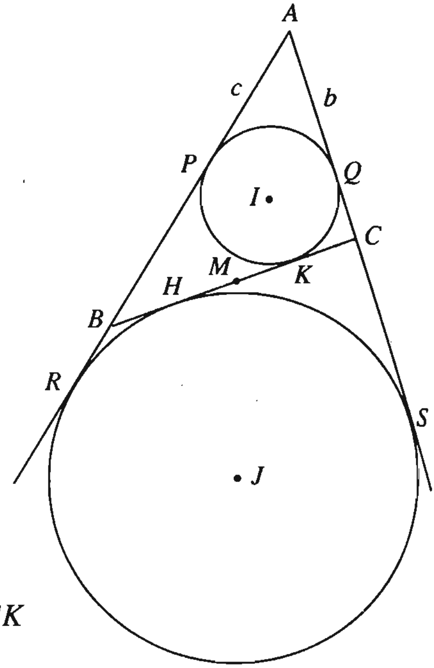
nên $c + CK = b + BK$.

Do $(c + CK) + (b + BK) = a + b + c = 2p$,

nên $c + CK = p$ hay $CK = p - c = BH$.

Gọi M là trung điểm của BC, từ $BH = CK$ suy ra $MH = MK$ hay

$$\mathscr{P}_{M/(I)} = MK^2 = MH^2 = \mathscr{P}_{M/(J)}.$$



Hình 40

Vậy M thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J).

35. (h. 41) a) Ta có

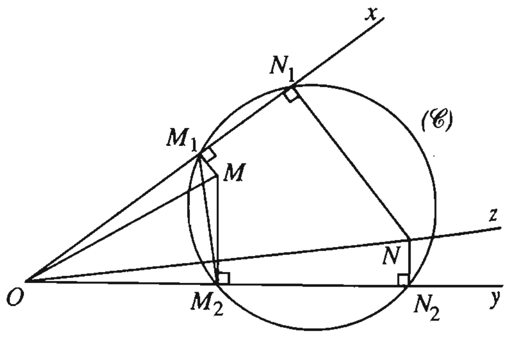
$\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{ON_2}$. (*)

Xét tích vô hướng

$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{ON}.(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})$

$= \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_1}$.

Do $\overrightarrow{ON_1}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{ON}$ trên Ox nên $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{ON_1}.\overrightarrow{OM_1}$.



Hình 41

Tương tự $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{ON_2}.\overrightarrow{OM_2}$. (**)

Từ (*) và (**), suy ra $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ hay $ON \perp M_1M_2$.

b) Theo câu a), N thuộc tia Oz cố định (vuông góc với M_1M_2).

Lại có $\widehat{zOy} = \widehat{M_1M_2M}$ (do $Oz \perp M_2M_1$, $Oy \perp M_2M$).

Mặt khác, OM_1MM_2 là tứ giác nội tiếp ($\widehat{OM_1M} = \widehat{OM_2M} = 90^o$) nên $\widehat{M_1M_2M} = \widehat{M_1OM}$. Từ đó suy ra $\widehat{zOy} = \widehat{MON_1}$.

36. (h. 42)

a) Tứ giác $HBMM'$ nội tiếp được do $\widehat{M'HB} = \widehat{M'MB} = 90^o$, suy ra

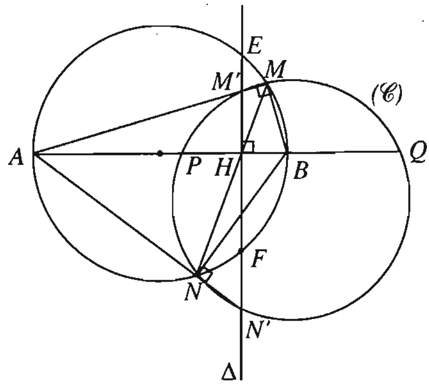
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}.$$

Tứ giác $HBN'N$ cũng nội tiếp được do $\widehat{N'HB} = \widehat{N'NB} = 90^o$, suy ra

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}.$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$.

Suy ra M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn, ta kí hiệu đường tròn đó là $(\mathscr{C})$.



Hình 42

b) Gọi P, Q là các giao điểm của $(\mathscr{C})$ với đường thẳng AB và E, F là các giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.

Khi đó $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HQ}$ nên E, P, F, Q cùng thuộc đường tròn (S). Đường tròn này tiếp xúc với AE, AF lần lượt tại E, F và do AE, AF đối xứng qua AB nên (S) cố định, suy ra P, Q là hai điểm cố định.

Vậy P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.

Do (S) là đường tròn cố định nên P, Q là hai điểm cố định của $(\mathscr{C})$.

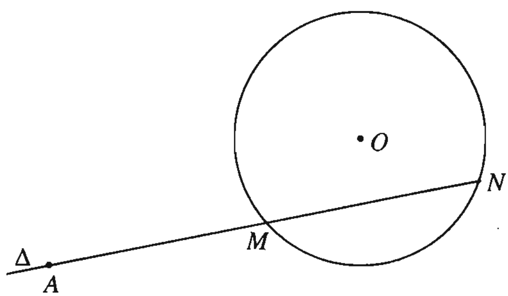
37. (h. 43)

• Nếu A ở ngoài đường tròn thì điều kiện $AM = MN$ tương đương với $AN = 2AM$. Ta lại có

$$AM.\ AN = d^2 - R^2 \ (d = OA).$$

Từ đó dẫn đến $2AM^2 = d^2 - R^2$

hay $$AM = \frac{\sqrt{2(d^2 - R^2)}}{2}.$$



Hình 43

Điểm M (nếu có) là một điểm chung của đường tròn $(O\ ;\ R)$ và đường tròn tâm A, bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{2(d^2 - R^2)}}{2}$.

• Nếu A nằm trong đường tròn thì đường thẳng Δ cần tìm là :

– Đường thẳng vuông góc với OA ở A khi A không trùng với O.

– Đường kính bất kì của đường tròn khi A trùng với O.

38. (h. 44)

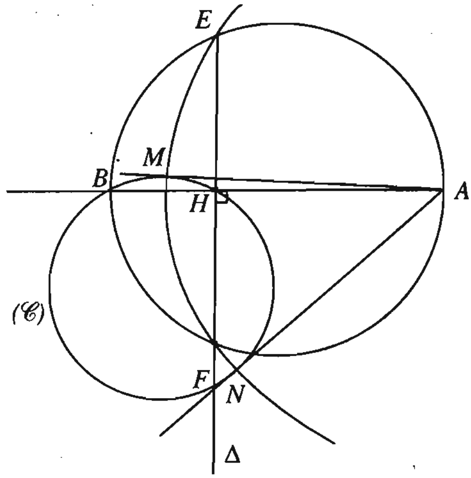
Ta có $AM = AN = AE$ (do M, N, E cùng thuộc đường tròn tâm A). Trong tam giác vuông AEB, $EH \perp AB$ nên

$$AE^2 = AH.AB = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$$

Từ đó suy ra

$$AM^2 = AN^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}.$$

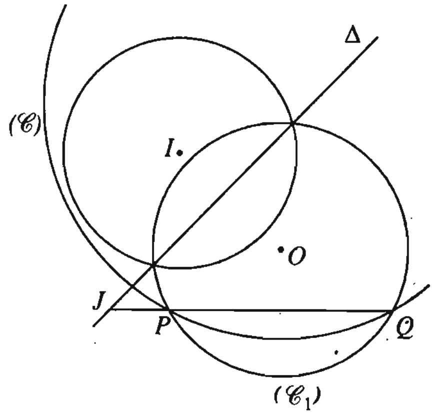
Vậy AM, AN là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ (xem bài 30 chương II).



Hình 44

39. a) (h. 45)

Gọi $(\mathscr{C}_1)$ là đường tròn cố định có tâm O và đi qua P, Q. Do I không thuộc đường trung trực của PQ nên trục đẳng phương Δ của $(\mathscr{C}_1)$ và (I) không song song với PQ, chúng phải cắt nhau ở J.



Hình 45

Bây giờ giả sử $(\mathscr{C})$ là đường tròn bất kì đi qua P và Q, ta có J thuộc trục đẳng phương PQ của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}_1)$ nên $\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C})} = \mathscr{P}_{J/(\mathscr{C}_1)}$.

Lại do J thuộc trục đẳng phương của $(\mathscr{C}_1)$ và (I) nên

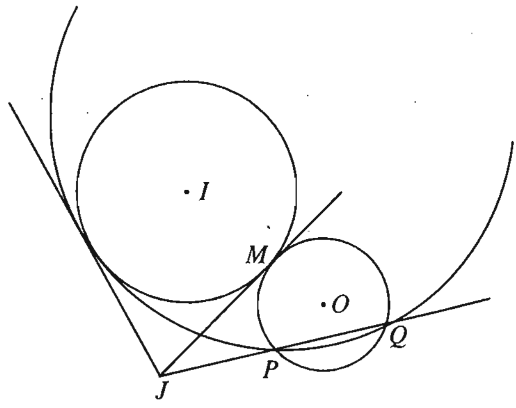
$$\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C}_1)} = \mathscr{P}_{J/(I)}.$$

Từ đó ta có $\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C})} = \mathscr{P}_{J/(I)}$, hay J thuộc trục đẳng phương của $(\mathscr{C})$ và (I).

b) (h. 46)

Kẻ tiếp tuyến JM với (I) (M là tiếp điểm), ta có $JM^2 = \mathscr{P}_{J/(I)}$.

Do $\mathscr{P}_{J/(I)} = \overrightarrow{JP}.\overrightarrow{JQ}$ nên đường tròn (MPQ) tiếp xúc với JM ở M và cũng tiếp xúc với (I) ở M. Từ đó suy ra cách dựng. Bài toán có hai nghiệm.



Hình 46

40. (h. 47)

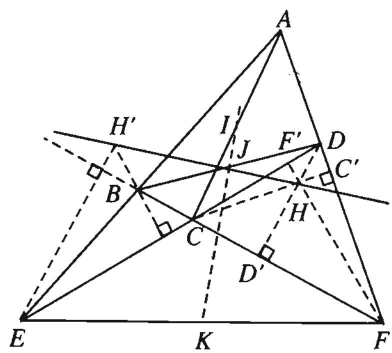
Kẻ các đường cao CC', DD', FF' của tam giác CDF và gọi H là trực tâm của tam giác đó thì $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$. (*)

Ta có trung điểm I của AC cũng là tâm đường tròn đường kính AC, đường tròn đó đi qua C' (do $\widehat{AC'C} = 90^o$).

Suy ra $\mathscr{P}_{H/(I)} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$.

Tương tự như vậy,

$\mathscr{P}_{H/(J)} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'}$ (J là tâm đường tròn đường kính BD).



Hình 47

$\mathscr{P}_{H/(K)} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$ (K là tâm đường tròn đường kính EF).

Kết hợp với (*) suy ra

$$\mathscr{P}_{H/(I)} = \mathscr{P}_{H/(J)} = \mathscr{P}_{H/(K)}.$$

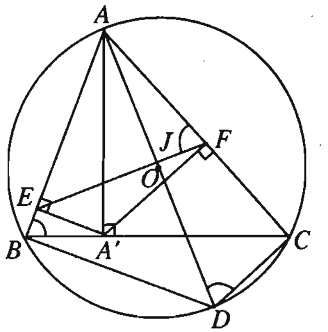
Nếu lấy trực tâm H' của tam giác BCE ta cũng sẽ có

$$\mathscr{P}_{H'/(I)} = \mathscr{P}_{H'/(J)} = \mathscr{P}_{H'/(K)}.$$

Vậy HH' là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J), nên $HH' \perp IJ$.
HH' cũng là trục đẳng phương của (I) và (K), nên $HH' \perp IK$.
Từ đó ta có I, J, K thẳng hàng.

41. (h. 48)

a) Trong hai tam giác vuông $AA'B$ và $AA'C$ ta có $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = AA'^2$ và $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = AA'^2$ nên $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$, suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp được, do đó ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ABC}$. Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên tứ giác $DCFJ$ nội tiếp được, suy ra $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$. Vậy $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$, do đó AA' là tiếp tuyến của đường tròn $(A'JD)$.



Hình 48

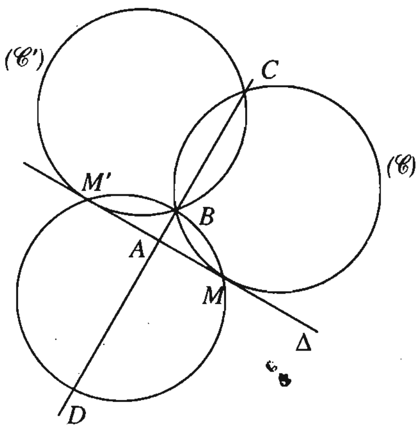
b) Ba điểm E, F, O thẳng hàng khi O trùng với J hay $AJ = R$.

Do $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$ nên $AJ = R$ nếu $AA'^2 = 2R^2$ hay $AA' = R\sqrt{2}$.

42. (h. 49)

a) Gọi M là tiếp điểm của Δ với đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua B và C, khi đó $AM^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$ không đổi. Do đó M là giao điểm của Δ và đường tròn tâm A, bán kính bằng $\sqrt{AB.AC}$. Từ đó suy ra có hai đường tròn cùng đi qua B, C và cùng tiếp xúc với Δ.

b) Gọi M, M' là hai tiếp điểm của Δ với hai đường tròn ở câu a) và gọi D là giao điểm (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn (BMM') thì



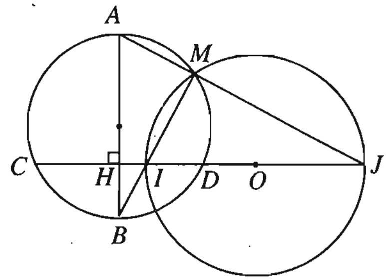
Hình 49

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = -AM^2 = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}$ hay D là điểm đối xứng với C qua A, do đó D là điểm cố định. Vậy khi Δ quay quanh A, các đường tròn (BMM') luôn đi qua điểm D cố định khác B.

43. (h. 50) *Nhận xét*. Hai điểm I và J thuộc hai tia BM, AM ở về cùng một phía của đường thẳng AB, do đó đường tròn đi qua ba điểm M, I, J có đường kính IJ không cắt đường thẳng AB. Cũng có thể chứng minh như sau.

a) Ta có B là điểm chính giữa của cung CD (do $AB \perp CD$) và $MA \perp MB$ ($\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên MB và MA là phân giác trong và phân giác ngoài của góc CMD.



Hình 50

Từ đó suy ra : $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = -\dfrac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$. (*)

Gọi H là giao điểm của AB và CD, O là tâm đường tròn (MIJ) thì H là trung điểm của CD và O là trung điểm của IJ.

Từ (*) suy ra $\overline{IC}.\overline{JD}+\overline{JC}.\overline{ID} = 0$ hay

$$\left(\overline{OC}-\overline{OI}\right).\left(\overline{OD}-\overline{OJ}\right)+\left(\overline{OC}-\overline{OJ}\right).\left(\overline{OD}-\overline{OI}\right)=0$$

$$\Rightarrow \overline{OC}.\overline{OD}+\overline{OI}.\overline{OJ}-\overline{OC}.\overline{OJ}-\overline{OI}.\overline{OD}+$$

$$+\overline{OC}.\overline{OD}+\overline{OI}.\overline{OJ}-\overline{OD}.\overline{OJ}-\overline{OI}.\overline{OC}=0$$

$$\Rightarrow -\left(\overline{OC}+\overline{OD}\right)\left(\overline{OI}+\overline{OJ}\right)+2\left(-\overline{OI}^2+\overline{OC}.\overline{OD}\right)=0.$$

Do $\overline{OI}+\overline{OJ}=0$ nên $OI^2=\overline{OC}.\overline{OD}<\left(\dfrac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}\right)^2$,

mà $\dfrac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}=\overline{OH}$ nên $OI^2 < OH^2$ hay $OI < OH$. Vậy H và cả đường thẳng AB nằm ngoài đường tròn (MIJ). Từ đó suy ra, từ điểm P bất kì trên AB, kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (MIJ).

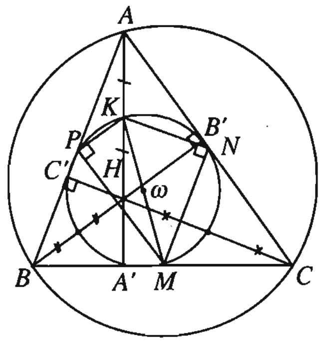
b) Ta có $AT^2 = AT'^2 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AJ}$, mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ không đổi (do A, H, B cố định).

Vậy $AT^2 = AT'^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ không đổi, suy ra T và T' luôn thuộc đường tròn tâm A bán kính bằng $\sqrt{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}}$.

44. (h. 51)

Giả sử tam giác ABC có $AA' \perp BC$ và M, N là trung điểm của BC và AC.

Vẽ đường tròn (ω) đi qua A', M, N nếu A' khác M, hoặc (ω) đi qua N và tiếp xúc với BC tại M nếu A' trùng với M. Lấy giao điểm thứ hai B' của (ω) và AC.



Hình 51

Khi đó $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CB'}$

hay $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'}$,

suy ra $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CA}$.

Vậy bốn điểm B, A', B', A cùng thuộc một đường tròn. Trong đường tròn này $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^{\circ}$, vậy (ω) đi qua chân đường cao B' hạ từ đỉnh B của tam giác ABC.

Đặt K là giao điểm thứ hai của (ω) với AA', ta có $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AN}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}$ (do $HB'CA'$ nội tiếp được).

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA'}$; do đó $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Vậy (ω) đi qua trung điểm K của AH.

Gọi P là trung điểm của AB, ta có $KP \,//\, BB'$ và $MP \,//\, AC$, suy ra $\widehat{KPM} = 90^{\circ}$. Tương tự cũng có $\widehat{KNM} = 90^{\circ}$ nên P nằm trên đường tròn (ω) đi qua M, N, K. Lí luận tương tự như trên ta được chân đường cao C' hạ từ đỉnh C và trung điểm các đoạn HB, HC đều thuộc đường tròn (ω).

45. $\vec{a}.\vec{b} = 1.(-3) + 2.1 = -1$; $\vec{b}.\vec{c} = 10$; $\vec{c}.\vec{a} = -8$;

$\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = -9$;

$\vec{a}.\left(\vec{b}-\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} = 7$.

46. a) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{-2.4 + 3.1}{\sqrt{2^2+3^2}.\sqrt{4^2+1^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{221}}$;

$\cos\left(\vec{a},\vec{i}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\left(\vec{b},\vec{j}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (2\ ;4)$; $\vec{a} - \vec{b} = (-6\ ;2)$;

$$\cos\left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\right) = \frac{-4}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{6^2+2^2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

b) $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} = (-2k + 4l\ ; 3k + l)$;

$\vec{c} \perp \left(\vec{a}+\vec{b}\right) \Leftrightarrow \vec{c}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k+4l) + 4(3k+l) = 0$

$\Leftrightarrow 2k + 3l = 0.$

Vậy với $2k + 3l = 0$ thì $\vec{c} \perp \left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

c) Giả sử $\vec{d} = (x;\ y)$. Khi đó từ $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$, suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2. \end{cases}$$

$ĐS: \vec{d} = \left(-\dfrac{5}{7}\ ;\ \dfrac{6}{7}\right).$

47. a) Giả sử $M(x\ ;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AM}(x+3\ ;-2)$; $\overrightarrow{BM}(x-4\ ;-3)$;

Tam giác MAB vuông tại M khi $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ hay $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Từ đó ta có $(x+3).(x-4) + (-2).(-3) = 0$ hay $x^2 - x - 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1 = (3\ ;0)$; $M_2 = (-2\ ;0)$.

b) Giả sử $N(0\ ;y) \in Oy$. Khi đó

$NA^2 = NB^2$

$\Leftrightarrow (0+3)^2 + (y-2)^2 = (0-4)^2 + (y-3)^2$

$\Leftrightarrow 9 + y^2 - 4y + 4 = 16 + y^2 - 6y + 9$

$\Leftrightarrow y = 6$. Vậy $N = (0\ ;6)$.

48. a) $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2} = 4.$

$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}.$

$AC = \sqrt{(2+1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}.$

Chu vi tam giác ABC bằng $4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (4;0)$, $\overrightarrow{AC} = (3;3)$ nên

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{12}{4.3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ suy ra } \widehat{BAC} = 45^{\circ}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}AB.AC.\sin 45^{\circ} = \frac{1}{2}.4.3\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 6$.

b) Gọi $H(x_1 ; y_1)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$. Từ đó dẫn đến $\begin{cases}x_1 - 2 = 0\\ x_1 + y_1 - 4 = 0,\end{cases}$

suy ra $H = (2 ; 2)$.

Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ

$$\begin{cases}x_G = \dfrac{-1+3+2}{3} = \dfrac{4}{3}\\ y_G = \dfrac{1+1+4}{3} = 2.\end{cases}$$

Giả sử $I(x_2 ; y_2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$.

Từ $IA = IB$ suy ra $(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 1)^2$. (1)

Từ $IA = IC$ suy ra $(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = (x_2 - 2)^2 + (y_2 - 4)^2$. (2)

Từ (1) ta có $x_2 = 1$, thay vào (2) được $y_2 = 2$. Vậy $I = (1 ; 2)$.

Như vậy $\overrightarrow{IH} = (1;0)$, $\overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{3};0\right)$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

49. $\overrightarrow{AB} = (8 ; 4)$; $\overrightarrow{AD} = (5 ;-5)$; $\overrightarrow{CB} = (-2 ; 4)$; $\overrightarrow{CD} = (-5 ; -5)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{8.5 + 4.(-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2}.\sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{(-2).(-5) + 4.(-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2}.\sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^{\circ}.$$

Vậy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

50. Gọi $C = (x ; y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1)$; $\overrightarrow{BC} = (x - 3 ; y)$. Từ $ABCD$ là hình vuông, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) + 1.y = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $C_1(4 ; -2)$, ta tính được đỉnh $D_1(2 ; -3)$.

Với $C_2(2 ; 2)$, ta tính được đỉnh $D_2(0 ; 1)$.

§3. Hệ thức lượng trong tam giác

51. Các kết luận đúng là a) và d).

52. a) Từ giả thiết suy ra $b < a$ nên $\widehat{B} < \widehat{A}$. Tương tự $\widehat{C} < \widehat{A}$.

b) Ta có $b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2$. Từ đó suy ra $a^2 < b^2 + c^2$ hay $b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$. Vậy $\cos A > 0$, do đó $\widehat{A} < 90^\circ$. Theo câu a) thì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cũng là góc nhọn.

53. a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 49 + 100 - 140\cos 56^\circ 29' \approx 71{,}7 \Rightarrow c \approx 8{,}47$.

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \approx 19{,}6 \Rightarrow b \approx 4{,}43$.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \approx 135{,}35 \Rightarrow a \approx 11{,}63$.

54. a) $\widehat{A} = 180^\circ - (33^\circ 24' + 66^\circ 59') = 79^\circ 37'$.

Ta có $b = \dfrac{a.\sin 33^\circ 24'}{\sin 79^\circ 37'} \approx 61$; $\quad c = \dfrac{a.\sin 66^\circ 59'}{\sin 79^\circ 37'} \approx 102$.

b) Từ đẳng thức $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ suy ra $\sin B = \dfrac{13.\sin 67^\circ 23'}{20} \approx 0{,}6$;

Vì $b < a$ nên $\widehat{B} < \widehat{A}$, suy ra $\widehat{B} \approx 36^\circ 52'$; $\widehat{C} \approx 180^\circ - (67^\circ 23' + 36^\circ 52') \approx 75^\circ 45'$;

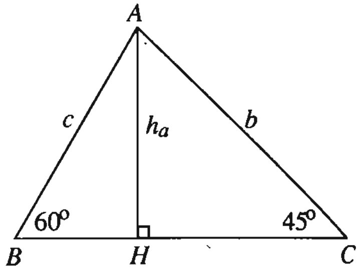
$$c = \frac{20.\sin 75^\circ 45'}{\sin 67^\circ 23'} \approx 21.$$

55. a) Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Đặt $AC = b$, $AB = c$. Theo định lí hàm số sin :

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}.$$

Suy ra $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^\circ}$; $c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2.\sin 75^\circ}$.



Hình 52

b) Kẻ $AH \perp BC$ (h. 52), do $\widehat{B}, \widehat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC, hay $BC = HB + HC$. Ta có

$$\begin{cases} HC = \dfrac{b\sqrt{2}}{2} \\ HB = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = HC + HB = b\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4.\sin 75^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

56. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 20^2 + 35^2 - 20.35$

$= 400 + 1225 - 700 = 925.$

Vậy $a \approx 30{,}41$.

a) Từ công thức tính diện tích $S = \dfrac{1}{2}ah_a$, suy ra $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc.\sin A}{a}$

$$\approx \frac{20.35\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{30{,}41} \approx 19{,}93.$$

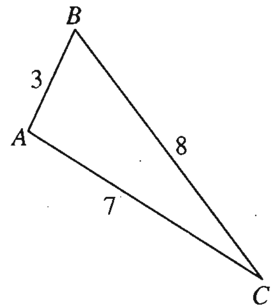
b) $2R = \dfrac{a}{\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{30{,}41}{\sqrt{3}} \approx 17{,}56.$

c) Từ công thức $S = \dfrac{a+b+c}{2}r$ và $S = \dfrac{abc}{4R} \approx 303{,}06$, suy ra

$$r = \frac{2S}{a+b+c} \approx \frac{606{,}12}{30{,}4 + 20 + 35} \approx 7{,}1.$$

57. a) Áp dụng công thức Hê-rông ta được :

$$S = \sqrt{9.(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}.$$



Hình 53

b) (h. 53) Áp dụng các công thức tính diện tích $S = \dfrac{abc}{4R}$ và $S = p.r.$

$ĐS : R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}, r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

58. $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{a}{2R}} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{abc}R.$

Tương tự, ta có $\cot B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{abc}R$;

$$\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{abc}R.$$

Từ đó suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$.

59. a) $b^2 - c^2 = (a^2 + c^2 - 2ac.\cos B) - (a^2 + b^2 - 2ab.\cos C)$

$$= c^2 - b^2 + 2a(b\cos C - c\cos B).$$

Từ đó ta được $2(b^2 - c^2) = 2a(b\cos C - c\cos B)$, suy ra

$$b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B).$$

b) $a(c\cos C - b\cos B) = ac\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - ab\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$= \frac{1}{2bc}\left[c^2(a^2+b^2-c^2) - b^2(a^2+c^2-b^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2bc}\left[a^2(c^2-b^2) + (b^2-c^2)(b^2+c^2)\right]$$

$$= (b^2-c^2)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = (b^2-c^2)\cos A.$$

c) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức

$$2R\sin C = 2R\sin A\cos B + 2R\sin B\cos A$$

hay $$c = a\cos B + b\cos A. \qquad (*)$$

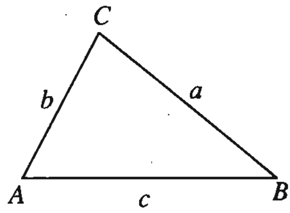
Cách 1. (h. 54)

Ta có $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$,

suy ra $c^2 = bc.\cos A + ac.\cos B$,

dẫn đến $c = b.\cos A + a.\cos B$.



Hình 54

Cách 2. Biến đổi vế phải của (*) được :

$$a.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

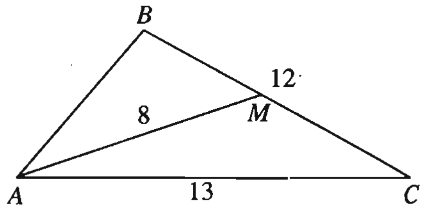
$$= \frac{1}{2c}(a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{2c^2}{2c} = c.$$

60. (h. 55) a) Theo công thức Hê-rông, ta có :

$$S_{AMC} = \sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2} - 13\right)\left(\frac{27}{2} - 6\right)\left(\frac{27}{2} - 8\right)}$$

$$= \frac{9\sqrt{55}}{4}.$$

Suy ra $S_{ABC} = 2S_{AMC} = \dfrac{9\sqrt{55}}{2}$.



Hình 55

b) Ta có $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \dfrac{a^2}{2}$,

suy ra $AB^2 = c^2 = 2AM^2 - b^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$$= 2.64 + 72 - 169 = 31 \Rightarrow c = \sqrt{31}.$$

Từ đó $\cos B = \dfrac{31+144-169}{24\sqrt{31}} = \dfrac{1}{4\sqrt{31}} \approx 0{,}045 \Rightarrow \widehat{B} \approx 87^\circ 25'$.

61. Đẳng thức $2\cot A = \cot B + \cot C$ tương đương với

$2.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}R = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}R + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}R$ (theo tính toán như bài 58) hay $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Từ giả thiết suy ra $c^2m_c^2 = b^2m_b^2$, do đó

$$c^2\left(\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)=b^2.\left(\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)$$

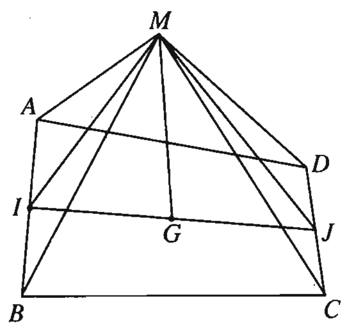
$$\Rightarrow 2b^2c^2+2a^2c^2-c^4=2b^2c^2+2a^2b^2-b^4.$$

$$\Rightarrow b^4-c^4=2a^2(b^2-c^2)$$

$$\Rightarrow b^2+c^2=2a^2 \qquad \text{(do } b^2-c^2\neq 0\text{)}.$$

Ta đi đến điều phải chứng minh

62. Xét tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của IJ (h. 56). Với mỗi điểm M, ta đều có :



Hình 56

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$$

$$=2MI^2+\frac{AB^2}{2}+2MJ^2+\frac{CD^2}{2}$$

$$=2\left(2MG^2+\frac{IJ^2}{2}\right)+\frac{AB^2+CD^2}{2}$$

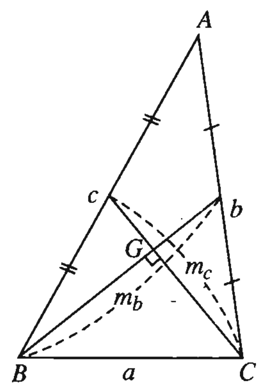
$$=4MG^2+\frac{AB^2+CD^2}{2}+IJ^2.$$

Từ đó suy ra

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=k^2$$

$\Leftrightarrow 4MG^2 = k^2 - \left(\dfrac{AB^2+CD^2}{2}+IJ^2\right)$ không đổi. Kết luận tương tự như bài 26.

63. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC (h. 57).



Hình 57

Khi đó $GB\perp GC \Leftrightarrow a^2=\dfrac{4}{9}\left(m_b^2+m_c^2\right)$

$$\Leftrightarrow 9a^2=4\left(\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2=4a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 5a^2=b^2+c^2.$$

Biến đổi đẳng thức $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{abc}R = 2\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{abc}R + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{abc}R\right)$ (theo tính toán như bài 58)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$.

Vậy $GB \perp GC \Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C)$.

64. Giả sử tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Ta có :

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GO}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - 2\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + 3\overrightarrow{GO}^2.$$

Do $OA = OB = OC = R$ và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

nên $3R^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3d^2$.

Mặt khác, $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

nên $3R^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3d^2$ suy ra $R^2 - d^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

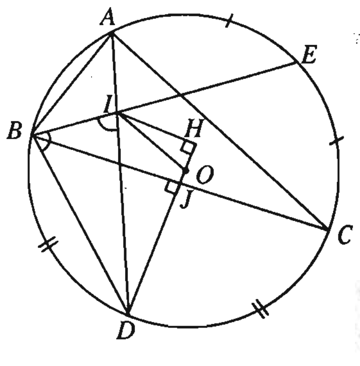
65. (h. 58)

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I\,;r)$.

Gọi D, E thứ tự là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{AC}$ thì $OD \perp BC$, $\widehat{BAD} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Mặt khác, ta có

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AE})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{DC} + \text{sđ}\overset{\frown}{EC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{sđ}\,\overset{\frown}{DCE}.$$



Hình 58

Vậy $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$, suy ra $ID = BD = 2R\sin\dfrac{A}{2}$.

Trong tam giác OID ta có : $OI^2 = ID^2 + OD^2 - 2\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DO}$.

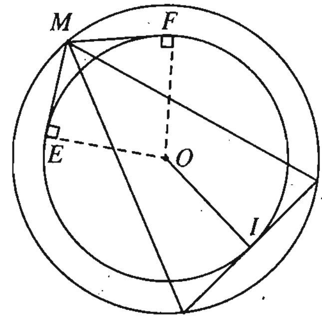
$OI^2 = 4R^2\sin^2\frac{A}{2} + R^2 - 2\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH}$ (với $IH \perp OD$).

Dễ thấy $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH} = DO.(DJ + JH) = R\left(BD\sin\frac{A}{2} + r\right)$

$$= R(2R\sin^2\frac{A}{2} + r) = 2R^2\sin^2\frac{A}{2} + Rr.$$

Từ đó suy ra $d^2 = R^2 - 2Rr$.

66. (h. 59)



Hình 59

a) Ta có $NP = 2R\sin 30^\circ = R$,

$OI^2 = ON^2 - NI^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$.

Suy ra $OI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi, do đó I thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Đảo lại với mỗi điểm I trên đường tròn đó ta kẻ dây cung NP của (O) vuông góc với OI thì $NP = 2NI = R$.

Ta có $\sin\widehat{NMP} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$. Góc NMP có thể bằng 30° hoặc 150°. Dễ thấy $\widehat{NMP} = 30^\circ$ khi và chỉ khi O, M ở về một phía của NP hay I nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ (E, F là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ M tới đường tròn $\left(O; R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$).

Vậy quỹ tích của I là cung lớn $\overset{\frown}{EF}$.

b) Diện tích tam giác MNP là $S = \frac{1}{2}MN.MP.\sin 30^\circ = \frac{1}{4}MN.MP$. Theo bất đẳng thức Cô-si, $MN.MP \leq \frac{MN^2 + MP^2}{2}$, mà $MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + \frac{R^2}{2}$ nên $S \leq \frac{1}{4}\left(MI^2 + \frac{R^2}{4}\right)$. (*)

Ta có MI lớn nhất khi M, O, I thẳng hàng và O nằm giữa M, I. Khi đó ta cũng có $MN = MP$ nên (*) xảy ra dấu "=". Vậy S lớn nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất hay M, O, I thẳng hàng và O nằm giữa M, I.

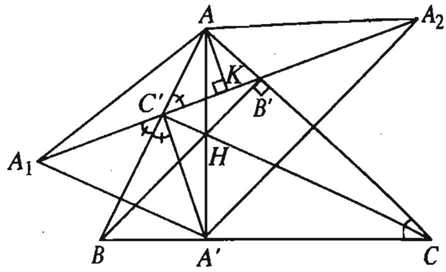
67. (h. 60)

a) Ta có $AB' = AB\cos A = 2R\sin C\cos A$.

Trong tam giác $AB'C'$ có

$$\frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin C'}.$$

Nhưng $\widehat{AC'B'} = \widehat{C}$ (do $BC'B'C$ là tứ giác nội tiếp), suy ra $\frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin C}$.



Hình 60

Từ đó suy ra $B'C' = \dfrac{AB'\sin A}{\sin C'} = \dfrac{2R\sin C\cos A\sin A}{\sin C} = 2R\sin A\cos A$.

b) Ta có $\widehat{A_1C'B} = \widehat{BC'A'}$ (do A_1, A' đối xứng với nhau qua AB).

$\widehat{BC'A'} = \widehat{AC'B'}$ (do $AC'A'C$ và $BC'B'C$ cùng là tứ giác nội tiếp).

Suy ra $\widehat{A_1C'B} = \widehat{B'C'A}$. Vậy A_1, C', B' thẳng hàng và $A_1C' = A'C'$.

Tương tự cũng có C', B', A_2 thẳng hàng và $B'A_2 = B'A'$.

Do đó, chu vi tam giác $A'B'C'$ bằng $A'C' + C'B' + B'A' = A_1C' + C'B' + B'A_2 = A_1A_2$.

c) Do A_1 và A' đối xứng nhau qua AB nên $AA_1 = AA'$, $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAA'}$; A_2 và A' đối xứng nhau qua AC nên $AA_2 = AA'$, $\widehat{A'AC} = \widehat{CAA_2}$.

Do đó tam giác AA_1A_2 là tam giác cân có góc ở đỉnh $\widehat{A_1AA_2} = 2\widehat{A}$. Kẻ AK vuông góc với A_1A_2, ta có

$$A_1A_2 = 2A_1K = 2AA_1\sin A = 2AA'\sin A = 2AB\sin B\sin A$$

$$= 4R\sin C\sin B\sin A.$$

Mặt khác theo câu a) :

$$B'C' + B'A' + A'C' = 2R\sin A\cos A + 2R\sin C\cos C + 2R\sin B\cos B.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

68. (h. 61)

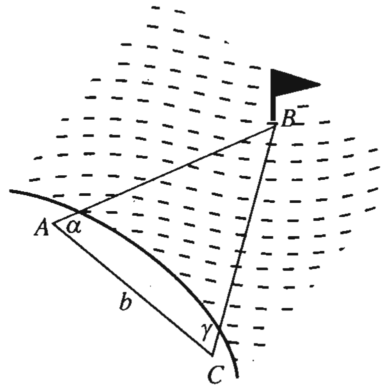
Chọn vị trí C thích hợp trên bờ cách điểm A một khoảng bằng b.

Sau đó dùng giác kế đo các góc được $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$.

Áp dụng định lí sin : $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$, ta tính được :

$$AB = \frac{AC\sin C}{\sin B} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\left[180^{\circ} - (\alpha + \gamma)\right]}$$

$$= \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$



Hình 61

69. (h. 62)

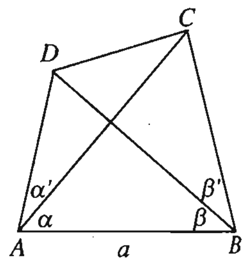
Tính AD và AC như bài toán 68 ta được

$$AD = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha + \alpha' + \beta)},\ AC = \frac{a\sin(\beta + \beta')}{\sin(\alpha + \beta + \beta')}.$$

Sau đó, áp dụng định lí côsin vào tam giác ACD ta có :

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.\,AD\cos\alpha'.$$

(Có thể dùng bài toán này để xác định khoảng cách giữa hai vị trí mà ta không tới được, chẳng hạn hai vị trí ở trên không hay trên biển).



Hình 62

70. (h. 63)

$S_{A'B'C'} = S_{GA'B'} + S_{GB'C'} + S_{GC'A'}$;

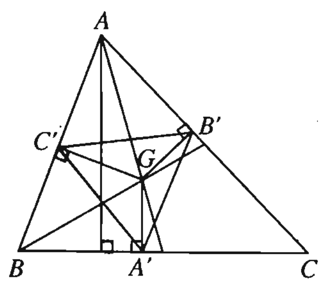
$$S_{GA'B'} = \frac{1}{2}GA'.GB'.\sin(180^{\circ} - \widehat{C})$$

$$= \frac{1}{18}h_a h_b \sin C.$$

Trong tam giác ABC, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$,

$\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Từ đó ta có $S_{GA'B'} = \dfrac{S^2.c}{9ab.R} = \dfrac{S^2.c^2}{9abc.R}$.



Hình 63

Tương tự, $S_{GB'C'} = \dfrac{S^2a^2}{9abc.R}$; $S_{GC'A'} = \dfrac{S^2b^2}{9abc.R}$.

Suy ra $S_{A'B'C'} = \dfrac{S^2}{9abc.R}(a^2+b^2+c^2)$.

Ta lại có $S = \dfrac{abc}{4R}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 9(R^2 - d^2)$ (theo bài 64)

nên $S_{A'B'C'} = \dfrac{R^2 - d^2}{4R^2}.S$.

71. (h. 64) a) $\cos(\alpha + 90^\circ)$

$= -\cos\left[180^\circ - (\alpha + 90^\circ)\right]$

$= -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.

b) Dễ thấy $AB' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$, $AC' = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$,

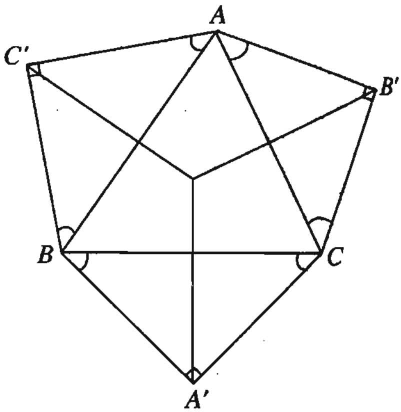
$\widehat{B'AC'} = \widehat{A} + 90^\circ$.

Trong tam giác $AB'C'$ ta có :

$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}$

$= \dfrac{b^2+c^2}{2} + bc\sin A$

$= \dfrac{b^2+c^2}{2} + 2S$.



Hình 64

Tương tự, $C'A'^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} + 2S$, $A'B'^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} + 2S$.

Từ đó suy ra $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$.

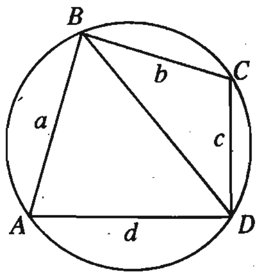
72. Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với độ dài cạnh là a, b, c, d (h. 65).

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\sin C = \sin A$;

$\cos C = -\cos A$.

Ta có $S = S_{ABD} + S_{CDB}$

$= \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C$



Hình 65

hay $2S = (ad + bc)\sin A$, suy ra $\sin A = \dfrac{2S}{ad+bc}$.

Mặt khác, tam giác ABD có $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos A$,

còn tam giác CBD có : $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.

Suy ra $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad + bc)\cos A$

$$\text{nên } \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Do $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ nên $16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad + bc)^2$.

Vậy $16S^2 = [2(ad + bc)]^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$

$$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)$$

$$= [(a + d)^2 - (b - c)^2].[(b + c)^2 - (a - d)^2]$$

$$= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)$$

$$= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a)$$

$$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Từ đó ta có $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

73. (h. 66) a) Giả sử tam giác đã cho là ABC có

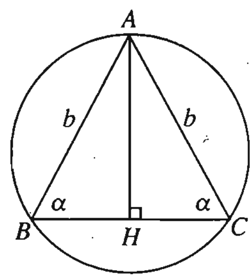
$$AB = AC = b.$$

Đặt $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ thì $\alpha < 90^\circ$.

Ta có

$\sin\alpha = \dfrac{b}{2R}$ nên $\cos B = \cos C = \cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4R^2}}$

$$= \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}.$$



Hình 66

Ta lại có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{2b^2 - 4b^2\cos^2\alpha}{2b^2}$

$$= 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - 2\left(1 - \frac{b^2}{4R^2}\right) = \frac{b^2 - 2R^2}{2R^2}.$$

b) Diện tích tam giác là

$$S=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}.2b\cos\alpha.b\sin\alpha=b^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{b^3\sqrt{4R^2-b^2}}{4R^2}.$$

Chu vi tam giác là $2p=2b+2b\frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}$.

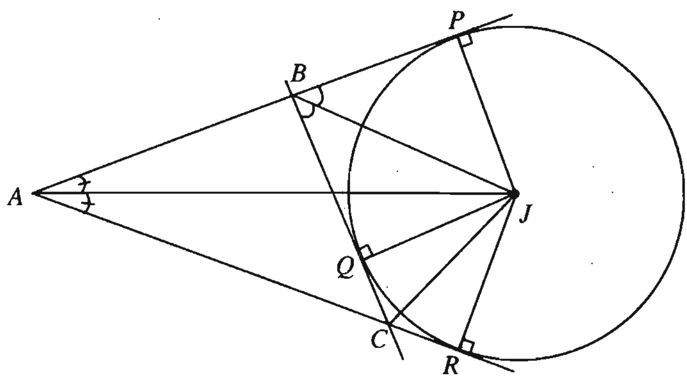
Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r=\frac{S}{p}=\frac{b^2\sqrt{4R^2-b^2}}{2R\left(2R+\sqrt{4R^2-b^2}\right)}$.

c) Ta phải tìm b để $y=b^3\sqrt{4R^2-b^2}$ đạt GTLN.

Viết lại $y=3\sqrt{3}\sqrt{\frac{b^2}{3}.\frac{b^2}{3}.\frac{b^2}{3}(4R^2-b^2)}$. Khi đó coi biểu thức trong căn là tích của bốn thừa số mà tổng của chúng bằng $4R^2$ không đổi nên y đạt GTLN khi và chỉ khi $\frac{b^2}{3}=4R^2-b^2$ hay $b^2=3R^2$ hay $b=R\sqrt{3}$.

Khi đó $\sin\alpha=\frac{R\sqrt{3}}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$, ta được tam giác ABC là tam giác đều.

74. Gọi Q, R, P là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (J, r_a) lần lượt với các đường thẳng BC, CA, AB (h. 67) thì :



Hình 67

$$S_{JAB} = \frac{1}{2}AB.JP = \frac{c.r_a}{2},$$

$$S_{JAC} = \frac{1}{2}AC.JR = \frac{br_a}{2},$$

$$S_{JBC} = \frac{1}{2}BC.JQ = \frac{ar_a}{2}.$$

Ta có

$$S = S_{JAB} + S_{JAC} - S_{JBC}$$
$$= \frac{b+c-a}{2}r_a$$
$$= \frac{a+b+c-2a}{2}r_a.$$

Vậy $S = (p-a).r_a$

75. Từ bài 74 (chương II), suy ra $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, tương tự $r_b = \dfrac{S}{p-b}$; $r_c = \dfrac{S}{p-c}$. Mặt khác, từ công thức tính diện tích ta có $r = \dfrac{S}{p}$. Từ giả thiết suy ra :

$$\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Rightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}.$$

Vì $2p - (b+c) = a$, suy ra $p(p-a) = (p-b)(p-c)$.

$$pa = p(b+c) - bc \Rightarrow bc = p(b+c-a) = \frac{b+c+a}{2}.(b+c-a)$$
$$\Rightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

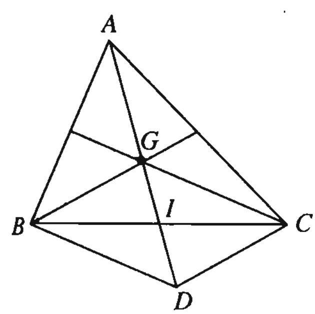
Theo định lí Py-ta-go ta có $\widehat{A} = 90^o$.

76. a) (h. 68) Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{GBC}} = \dfrac{AI}{GI} = 3$. Vậy $S = 3S_{GBC}$.

Lấy D là điểm đối xứng với G qua I ta được hình bình hành $BGCD$, do đó :

$$S_{GBC} = S_{BGD} = \frac{1}{2}S_{BGCD}.$$

Vậy $S_{ABC} = 3S_{BGD}$.



Hình 68

Tam giác BGD có độ dài ba cạnh bằng 10, 12, 18 nên :

$$S_{BGD} = \sqrt{20.(20-10).(20-12)(20-18)}$$
$$= \sqrt{20.10.8.2} = 40\sqrt{2}.$$

Vậy $S = 120\sqrt{2}$.

b) Giả sử $m_a = 15$, $m_b = 18$, $m_c = 27$. Ta có :

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \\ c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 1704.$$

Ta lại có $\quad b^2 - a^2 = \dfrac{4}{3}\left(m_a^2 - m_b^2\right) = -132,$

$$b^2 - c^2 = \frac{4}{3}\left(m_c^2 - m_b^2\right) = 540.$$

Từ đó ta tính được $b = 8\sqrt{11},\ a = 2\sqrt{209},\ c = 2\sqrt{41}$.

77. a) $b = a$ nên $\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \dfrac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$.

$AB = c = 2a.\sin\dfrac{C}{2} = 2.6,3.\sin 27^\circ \approx 5,72.$

b) $c^2 = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^\circ$

$\approx 578 - 322.(-0,6428) \approx 785.$

Vậy $c \approx 28$.

Học sinh tự tính các góc A, B.

78. a) $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 80^\circ$.

Từ $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ suy ra $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 12,31$,

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{14\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,14.$$

b) $\widehat{B} = 20^\circ$; $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C} \approx 25,98$; $b = \dfrac{c.\sin B}{\sin C} \approx 13,82.$

79. a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}7333$; $\quad \widehat{A} \approx 42^o50'$.

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0{,}4857$; $\quad \widehat{B} \approx 60^o56'$.

$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 76^o14'$.

b) $\cos A = 0{,}5755$; $\quad \widehat{A} \approx 54^o52'$.

$\cos B = 0{,}0998$; $\quad \widehat{B} \approx 84^o16'$.

$\widehat{C} \approx 40^o52'$.

80. $\widehat{ABC} = 30^o$; $\widehat{ACB} = 120^o \Rightarrow \widehat{A} = 30^o$.

Từ đó suy ra $AC = CB = 100 \Rightarrow AH = AC.\sin\widehat{ACH} = 50$.

Chiều cao của ngọn đồi là 50 mét.

81. Trọng lực $\vec{P}$ được phân tích thành hai lực $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ dọc theo hai đoạn dây. Lực căng lên mỗi dây sẽ là :

$$|\overrightarrow{CM}| = |\vec{P}|.\cos 45^o = 50\sqrt{2}(\text{N})$$

$$|\overrightarrow{CN}| = |\vec{P}|.\cos 60^o = 50(\text{N}).$$

Bài tập ôn tập chương II

82. $A = 1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2 - \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3 - \dfrac{11\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$.

$B = \dfrac{3}{2} - 1 - 4 + 5 = \dfrac{3}{2}$.

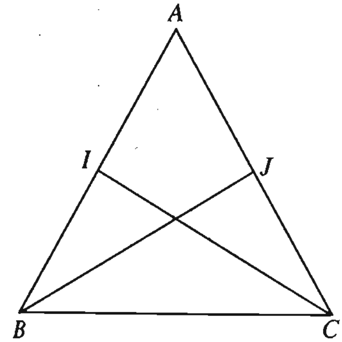
83. (h. 69) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^o = -\dfrac{1}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BC}) = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BJ}) = \cos 150^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{CI}) = \cos 120^o = -\dfrac{1}{2}$.



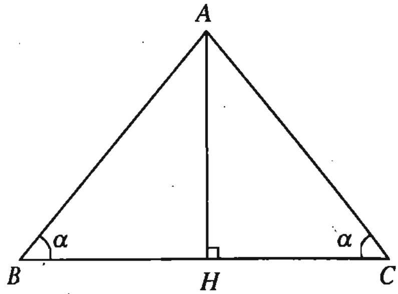
Hình 69

84. (h. 70) Xét tam giác ABC cân đỉnh A có góc ở đáy bằng α, AH là đường cao. Ta có :

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = BH.AH,$$

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin(180^\circ - 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin 2\alpha.$$



Hình 70

Từ đó $AB.AC.\sin 2\alpha = 2BH.AH$,

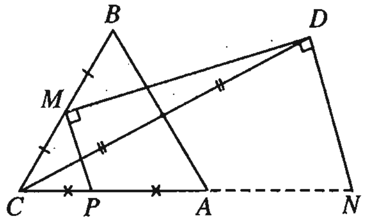
suy ra $\sin 2\alpha = 2.\frac{BH}{AB}.\frac{AH}{AC} = 2\cos\alpha.\sin\alpha.$

85. (h. 71)

Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{b}}{2}$ và

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$; $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}$.



Hình 71

a) Giả sử $\overrightarrow{CN} = n\overrightarrow{CA} = n\vec{a}$. Khi đó ta có :

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$ và $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CN} = (1-n)\vec{a} + \vec{b}$.

Suy ra : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ND} = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right).\left[(1-n)\vec{a} + \vec{b}\right]$

$$= (1-n)\vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{2} + \left(1 + \frac{1-n}{2}\right)\vec{a}.\vec{b}$$

$$= 1 - n + \frac{1}{2} + \frac{3-n}{4} = \frac{9-5n}{4}.$$

Để tam giác MDN vuông tại D ta phải có $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ND} = 0$ hay $n = \frac{9}{5}$.

Vậy $\overrightarrow{CN} = \frac{9}{5}\vec{a}$.

Để tính diện tích tam giác MDN, ta tính bình phương độ dài hai cạnh MD và ND :

$$MD^2 = \overrightarrow{MD}^2 = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}.$$

$$ND^2 = \overrightarrow{ND}^2 = \left(-\frac{4}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \frac{16}{25} + 1 - \frac{4}{5} = \frac{21}{25}.$$

Vậy $S_{MDN} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{4}.\frac{21}{25}} = \frac{7\sqrt{3}}{20}$.

b) Giả sử $\overrightarrow{CP} = p\overrightarrow{CA} = p\vec{a}$. Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CM} = p\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Khi đó : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MP} = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)\left(p\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right) = p - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{p}{4} = \frac{5p-2}{4}$.

Để tam giác PMD vuông tại M ta phải có $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MP} = 0$ hay $p = \frac{2}{5}$, tức $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\vec{a}$.

Khi đó $MP^2 = \overrightarrow{MP}^2 = \left(\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{21}{100}$.

Vậy $S_{PMD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{100}.\frac{7}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{40}$.

c) Theo trên, ta có $\overrightarrow{MP} = \frac{2\vec{a}}{5} - \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CP} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{2\vec{a}}{5} = \frac{3\vec{a}}{5} + \vec{b}$.

Bởi vậy : $\overrightarrow{MP}^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{21}{100}$; $\overrightarrow{PD}^2 = \frac{9}{25} + 1 + \frac{3}{5} = \frac{49}{25}$;

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PD} = \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} - \frac{1}{2} = -\frac{21}{100}.$$

Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PD}|}{|\overrightarrow{MP}|.|\overrightarrow{PD}|} = \frac{21}{100} : \left(\sqrt{\frac{21}{100}}.\sqrt{\frac{49}{25}}\right) = \frac{\sqrt{21}}{10}.\frac{5}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

86. a) $2R = \frac{a}{\sin A} = 10 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

b) Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA và AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC (h. 72).

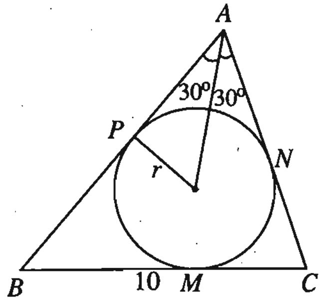
Ta có $AP = AN = r.\cot 30^{\circ} = 5$.

$BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có :

$$(b - AN) + (c - AP) = 10$$

hay $\quad b + c = 20. \qquad (1)$



Hình 72

Theo định lí côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^{\circ}$$

hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$,

suy ra $bc = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \dfrac{20^2 - 10^2}{3}$,

do đó $bc = 100. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b = c = 10$ nên ABC là tam giác đều.

87. a) Ta chỉ phải tìm độ dài cạnh BC.

Áp dụng định lí côsin

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4.\cos 60^{\circ} = 76.$$

Suy ra $BC \approx 8,72$.

Chu vi tam giác $2p \approx 10 + 4 + 8,72 \approx 22,72$.

b) (h. 73)

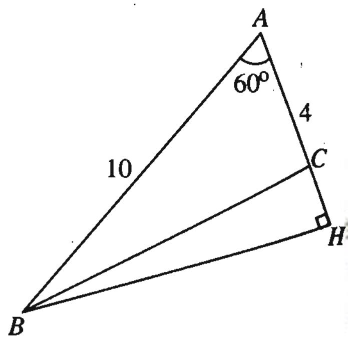
Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB.\cos 60^{\circ} = 5,$$

suy ra $HC = 5 - 4 = 1$.

$BH = AB.\sin 60^{\circ} = 5\sqrt{3}$.

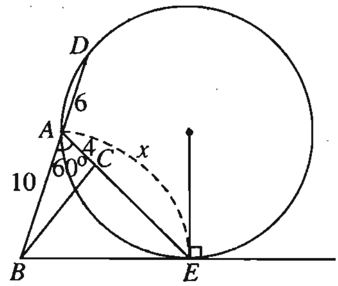
$$\tan C = -\tan\widehat{BCH} = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}.$$



Hình 73

c) (h. 74)

Để BE là tiếp tuyến của đường tròn (ADE), phải có $BE^2 = BA.BD = 10(10 + 6) = 160$. Ta có $AE = x$, áp dụng định lí côsin cho tam giác $ABE : BE^2 = x^2 + 100 - 10x$.



Hình 74

Từ đó dẫn đến phương trình

$$x^2 - 10x + 100 = 160$$

hay $x^2 - 10x - 60 = 0$, phương trình này có một nghiệm dương là $x = 5 + \sqrt{85}$. Vậy điểm E cần tìm là điểm trên tia AC và cách A một khoảng bằng $5 + \sqrt{85}$.

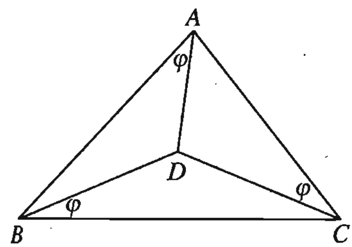
88. (h. 75)

a) Theo định lí sin, trong tam giác ABD :

$$\frac{BD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(B - \varphi)}, \qquad (1)$$

trong tam giác BCD :

$$\frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{BD}{\sin(C - \varphi)}, \qquad (2)$$



Hình 75

trong tam giác ACD :

$$\frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin(A - \varphi)}.$$

Từ đó ta có : $\dfrac{AD.BD.CD}{\sin^3\varphi} = \dfrac{AD.BD.CD}{\sin(A - \varphi).\sin(B - \varphi).\sin(C - \varphi)}$.

Suy ra đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng định lí côsin vào tam giác DAB, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\varphi.$$

Mặt khác, $\frac{1}{2}AB.AD.\sin\varphi = S_{ABD}$.

Từ đó suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{DAB}.\cot\varphi$.

Tương tự : $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{DBC}.\cot\varphi$;

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{DCA}.\cot\varphi.$$

Cộng theo vế rồi biến đổi với chú ý rằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ bằng diện tích S của tam giác ABC, ta được :

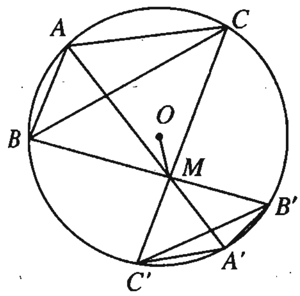
$$\cot\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$$

Theo bài 58 (chương II) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

89. (h. 76) $S_{A'B'C'} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}.$

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}.$$



Hình 76

Suy ra $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA}$ (*)

Ta lại có $\Delta MAB \backsim \Delta MB'A'$ nên

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{MA.MA'}{MA.MB}$$

Do $MA.MA' = \left|\mathscr{P}_{M/(O)}\right| = R^2 - MO^2$

nên $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MA.MB}.$

Tương tự $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MB.MC}$; $\dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MC.MA}$. (**)

Thay (**) vào (*) ta được điều phải chứng minh.

90. (h. 77) a) Kẻ hai tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại B và C, chúng cắt nhau ở I. Khi đó dễ thấy đường tròn tâm I bán kính $r = IB = IC$ thoả mãn yêu cầu.

b) Kẻ đường thẳng OM, nó cắt đường tròn (I) ở N ($N \neq M$), ta có

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OB^2 \; (= \mathscr{P}_{O/(I)}).$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}) = R^2$,

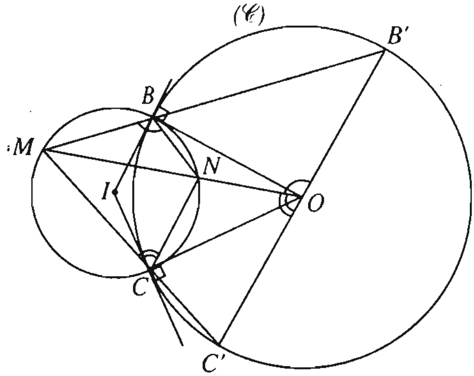
suy ra $OM^2 - \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MN} = R^2$,

hay $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MN} = OM^2 - R^2$

$$= \mathscr{P}_{M/(\mathscr{C})} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB'}.$$

Vậy N, B, O, B' cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\widehat{NOB'} = \widehat{NBM}$.

Tương tự ta có N, C, O, C' cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\widehat{NOC'} = \widehat{NCM}$.



Hình 77

Do tứ giác $NBMC$ nội tiếp nên $\widehat{NBM} + \widehat{NCM} = 180^\circ$.

Từ đó ta có $\widehat{NOB'} + \widehat{NOC'} = 180^\circ$. Vậy ba điểm O, B', C' thẳng hàng hay $B'C'$ là đường kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

91. (h. 78)

a) Lấy điểm H_1 đối xứng với H qua A' hay $\overrightarrow{A'H} = -\overrightarrow{A'H_1}$.

Khi đó $\widehat{BH_1C} = \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Suy ra ABH_1C là tứ giác nội tiếp, do đó

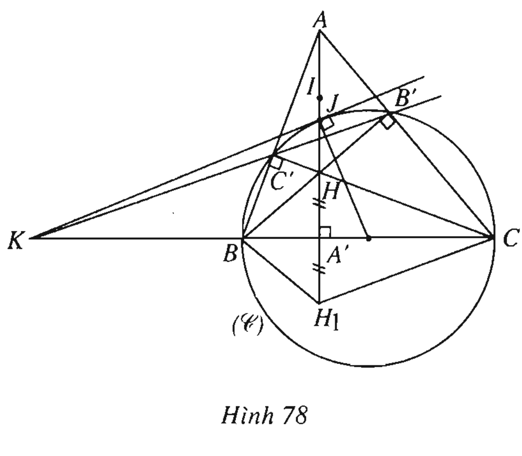
$$\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'H_1}.\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}.$$

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ và đường tròn tâm I đường kính HA có $B'C'$ là trục đẳng phương. Kẻ tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại J cắt đường thẳng BC ở K thì

$$KJ^2 = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC} = \mathscr{P}_{K/(\mathscr{C})}.$$

Ta hãy tính phương tích của K đối với đường tròn tâm I :

$$\mathscr{P}_{K/(I)} = KI^2 - \left(\frac{AH}{2}\right)^2$$



Hình 78

$$= KA'^2 + \overrightarrow{A'I}^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AH}}{2}\right)^2$$

$$= KA'^2 + \left(\frac{\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'H}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{A'H} - \overrightarrow{A'A}}{2}\right)^2$$

$$= KA'^2 + \overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}$$

Theo câu a), $\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$. Mặt khác ta có $\widehat{BJC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $JA' \perp BC$ nên $A'J^2 = -\overrightarrow{A'B}\,.\,\overrightarrow{A'C}$.

Vậy $\mathscr{P}_{K/(I)} = KA'^2 + A'J^2 = KJ^2 = \mathscr{P}_{K/(\mathscr{C})}$, suy ra K thuộc trục đẳng phương $B'C'$. Vậy ba đường thẳng BC, $B'C'$ và tiếp tuyến tại J của $(\mathscr{C})$ đồng quy ở K.

Các bài tập trắc nghiệm chương II

1. (D)	**2.** (A)	**3.** (A)	**4.** (C)
5. (D)	**6.** (B)	**7.** (C)	**8.** (C)
9. (B)	**10.** (C).		

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. • *Phương trình tổng quát của đường thẳng có dạng* $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$; $\vec{n} = (a; b)$ *là một vectơ pháp tuyến.*

Đặc biệt :

– *Khi* $b = 0$ *thì đường thẳng* $ax + c = 0$ *song song hoặc trùng với* Oy *(h. 79a);*

– *Khi* $a = 0$ *thì đường thẳng* $by + c = 0$ *song song hoặc trùng với* Ox *(h. 79b);*

– *Khi* $c = 0$ *thì đường thẳng* $ax + by = 0$ *đi qua gốc toạ độ (h. 79c).*

• *Đường thẳng đi qua* $M(x_0 ; y_0)$ *và nhận* $\vec{n} = (a; b)$ *làm vectơ pháp tuyến có phương trình*

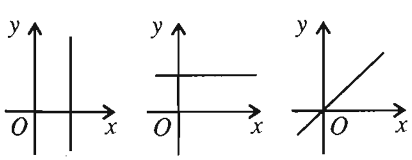
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

2. Đường thẳng cắt trục Ox *tại* $A(a ; 0)$ *và* Oy *tại* $B(0 ; b)$ *(a và b khác 0) có phương trình theo đoạn chắn* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (h. 80).

3. • *Phương trình đường thẳng theo hệ số góc có dạng* $y = kx + b$, *trong đó* $k = \tan\alpha$ *với* α *là góc giữa tia* Mt *(phần của đường thẳng nằm phía trên* Ox*) với tia* Mx (h. 81).

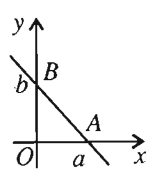
• *Đường thẳng qua* $M(x_0 ; y_0)$ *và có hệ số góc là k thì có phương trình :*

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

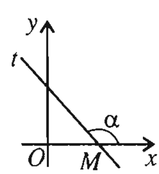


a) b) c)

Hình 79



Hình 80



Hình 81

4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *và* $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$. *Khi đó*

Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow D \neq 0$;

$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow D = 0$ *và* $D_x \neq 0$ (*hoặc* $D_y \neq 0$) ;

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$.

Đặc biệt khi a_2, b_2, c_2 *khác 0 thì*

Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

II – ĐỀ BÀI

1. Viết phương trình các đường cao của tam giác ABC biết $A(-1 ; 2)$, $B(2 ; -4)$, $C(1 ; 0)$.

2. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết $M(-1 ; 1)$, $N(1 ; 9)$, $P(9 ; 1)$ là các trung điểm của ba cạnh tam giác.

3. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ :

a) Qua trục hoành ; b) Qua trục tung ; c) Qua gốc toạ độ.

4. Cho điểm $A(1; 3)$ và đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua A.

5. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau :

a) $d_1 : 2x - 5y + 6 = 0$ và $d_2 : -x + y - 3 = 0$;

b) $d_1 : -3x + 2y - 7 = 0$ và $d_2 : 6x - 4y - 7 = 0$;

c) $d_1 : \sqrt{2}x + y - 3 = 0$ và $d_2 : 2x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} = 0$;

d) $d_1 : (m - 1)x + my + 1 = 0$ và $d_2 : 2x + y - 4 = 0$.

6. Biện luận vị trí tương đối của hai đường thẳng sau theo tham số m

$\Delta_1 : 4x - my + 4 - m = 0$;

$\Delta_2 : (2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$.

7. Cho điểm $A(-1\ ;\ 3)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho hai đỉnh B, C nằm trên Δ và các toạ độ của đỉnh C đều dương.

a) Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D ;

b) Tính chu vi và diện tích của hình vuông $ABCD$.

8. Chứng minh rằng diện tích S của tam giác tạo bởi đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ (a, b, c khác 0) với các trục toạ độ được tính bởi công thức : $S = \dfrac{c^2}{2|ab|}$.

9. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua $P(6\ ;\ 4)$ và tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

10. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua $Q(2\ ;\ 3)$ và cắt các tia Ox, Oy tại hai điểm M, N khác điểm O sao cho $OM + ON$ nhỏ nhất.

11. Cho điểm $M(a\ ;\ b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

12. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - y - 2 = 0$, $d_2 : x + y + 3 = 0$ và điểm $M(3\ ;\ 0)$.

a) Tìm toạ độ giao điểm của d_1 và d_2.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại điểm A và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

13. Cho tam giác ABC có $A(0\ ;\ 0)$, $B(2\ ;\ 4)$, $C(6\ ;\ 0)$ và các điểm : M trên cạnh AB, N trên cạnh BC, P và Q trên cạnh AC sao cho $MNQP$ là hình vuông.

Tìm toạ độ các điểm M, N, P, Q.

§2. Phương trình tham số của đường thẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ và nhận $\vec{u}(a\ ;\ b)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$

2. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u}(a; b)$ (a và b khác 0) làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$.

Chú ý. *Khi $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.*

II – ĐỀ BÀI

14. Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng sau

a) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 - 2t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 4 \end{cases}$.

15. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau

a) $3x - y - 2 = 0$; b) $-2x + y + 3 = 0$; c) $x - 1 = 0$; d) $y - 6 = 0$.

16. Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

a) d đi qua $A(-1 ; 2)$ và song song với đường thẳng $5x + 1 = 0$;

b) d đi qua $B(7 ; -5)$ và vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$;

c) d đi qua $C(-2 ; 3)$ và có hệ số góc $k = -3$;

d) d đi qua hai điểm $M(3 ; 6)$ và $N(5 ; -3)$.

17. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = x_2 + ct' \\ y = y_2 + dt'. \end{cases}$

(x_1, x_2, y_1, y_2 là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1 và d_2 :

a) Cắt nhau ; b) Song song ; c) Trùng nhau ; d) Vuông góc với nhau.

18. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau và tìm toạ độ giao điểm của chúng (nếu có) :

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$ và $\Delta_2 : 2x - y - 1 = 0$;

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y - 3}{-2}$;

c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - t' \end{cases}$;

d) $\Delta_1 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+3}{5}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+18}{-10}$.

19. Cho hai đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = 3 - t' \end{cases};$$

a) Tìm toạ độ giao điểm M của d_1 và d_2.

b) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của :

– Đường thẳng đi qua M và vuông góc với d_1;

– Đường thẳng đi qua M và vuông góc với d_2.

20. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3; 1)$.

a) Tìm điểm A trên Δ sao cho A cách M một khoảng bằng $\sqrt{13}$.

b) Tìm điểm B trên Δ sao cho đoạn MB ngắn nhất.

21. Một cạnh tam giác có trung điểm là $M(-1 ; 1)$. Hai cạnh kia nằm trên các đường thẳng $2x + 6y + 3 = 0$ và $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh thứ ba của tam giác.

22. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh BC là $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2}$, phương trình các đường trung tuyến BM và CN lần lượt là $3x + y - 7 = 0$ và $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB, AC.

23. Lập phương trình các đường thẳng chứa bốn cạnh của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh $A(-1 ; 2)$ và phương trình của một đường chéo là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t. \end{cases}$

24. Cho hai đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t. \end{cases}$ và $\Delta' : \begin{cases} x = -2 - t' \\ y = t'. \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ.

25. Cho hai điểm $A(-1; 2)$, $B(3 ; 1)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t. \end{cases}$

Tìm toạ độ điểm C trên Δ sao cho :

a) Tam giác ABC cân.

b) Tam giác ABC đều.

§3. Khoảng cách và góc

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ được tính theo công thức

$$d(M;\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Khi đó

M và N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$;

M và N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Khi đó

• *Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là*

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

• *Góc giữa Δ_1 và Δ_2 được xác định bởi công thức*

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$

II – ĐỀ BÀI

26. Cho tam giác ABC với $A = (-1 ; 0)$, $B = (2 ; 3)$, $C = (3 ; -6)$ và đường thẳng $\Delta : x - 2y - 3 = 0$.

a) Xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

27. Cho ba điểm $A(2 ; 0)$, $B(4 ; 1)$, $C(1 ; 2)$

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

c) Tìm toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

28. Tìm các góc của một tam giác biết phương trình các cạnh tam giác đó là :

$$x + 2y = 0 ; 2x + y = 0 ; \; x + y = 1.$$

29. Cho điểm $A = (-1 ; 2)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t. \end{cases}$

Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ. Từ đó suy ra diện tích của hình tròn tâm A tiếp xúc với Δ.

30. Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1 ; y_1)$ và $N(x_2 ; y_2)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta : \; ax + by + c = 0$?

31. Biết các cạnh của tam giác ABC có phương trình :

$AB : x - y + 4 = 0$; $\quad BC : \; 3x + 5y + 4 = 0$; $\quad AC : \; 7x + y - 12 = 0$.

a) Viết phương trình đường phân giác trong của góc A ;

b) Không dùng hình vẽ, hãy cho biết gốc toạ độ O nằm trong hay nằm ngoài tam giác ABC.

32. Viết phương trình đường thẳng

a) Qua $A(-2 ; 0)$ và tạo với đường thẳng $d : x + 3y - 3 = 0$ một góc 45° ;

b) Qua $B(-1 ; 2)$ và tạo với đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$ một góc 60°.

33. Xác định các giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

và $3x + 4y + 12 = 0$ bằng 45°.

34. a) Cho hai điểm $A(1 ; 1)$ và $B(3 ; 6)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng 2.

b) Cho đường thẳng d có phương trình $8x - 6y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và cách d một khoảng bằng 5.

35. Cho ba điểm $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 0)$, $C(3 ; 4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách đều hai điểm B, C.

36. a) Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng đường thẳng AC đi qua điểm $M(1 ; -3)$.

b) Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x - y + 5 = 0$, $\Delta_2 : 3x + 6y - 1 = 0$ và điểm $M(2 ; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

37. Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1 : ax + by + c = 0$ và $\Delta_2 : ax + by + d = 0$. Chứng minh rằng

a) Khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $\dfrac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

b) Phương trình đường thẳng song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 có dạng

$$ax + by + \frac{c + d}{2} = 0.$$

Áp dụng. Cho hai đường thẳng song song có phương trình $-3x + 4y - 10 = 0$ và $-3x + 4y + 1 = 0$. Hãy lập phương trình đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng trên.

38. Cho hình vuông có đỉnh $A = (-4 ; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

39. Cho tam giác ABC có đỉnh $A = \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Hai đường phân giác trong của góc B và C lần lượt có phương trình $x - 2y - 1 = 0$ và $x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh BC của tam giác.

40. Cho hai điểm $P(1; 6)$, $Q(-3 ; -4)$ và đường thẳng $\Delta :\ 2x - y - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho $MP + MQ$ nhỏ nhất ;

b) Tìm toạ độ điểm N trên Δ sao cho $|NP - NQ|$ lớn nhất.

41. Cho đường thẳng $\Delta_m : (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0$ và hai điểm $A(2 ; 3)$, $B(1 ; 0)$.

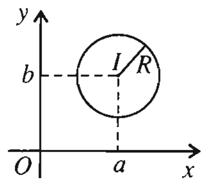
a) Chứng minh rằng Δ_m luôn đi qua một điểm cố định với mọi m ;

b) Xác định m để Δ_m có ít nhất một điểm chung với đoạn thẳng AB ;

c) Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ_m là lớn nhất.

§4. Đường tròn

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN



Hình 82

1. • *Phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính R có dạng :*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

hay dạng khai triển :

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ với } c=a^2+b^2-R^2.$$

• *Phương trình* $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ *với điều kiện* $a^2+b^2-c>0$, *là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ *(h. 82).*

2. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$*) tâm I(a ; b), bán kính R và đường thẳng* $\Delta : \alpha x+\beta y+\gamma=0$.

Δ *tiếp xúc với (*$\mathscr{C}$*)* $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha a+\beta b+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=R.$

II – ĐỀ BÀI

42. Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của các đường tròn sau

a) $(x+4)^2+(y-2)^2=7$;

b) $(x-5)^2+(y+7)^2=15$;

c) $x^2+y^2-6x-4y=36$;

d) $x^2+y^2-10x-10y=55$;

e) $x^2+y^2+8x-6y+8=0$;

f) $x^2+y^2+4x+10y+15=0$.

43. Viết phương trình đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau

a) $A(7 ; -3)$; $B(1 ; 7)$;

b) $A(-3 ; 2)$; $B(7 ; -4)$.

44. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $A=(1 ; 3)$, $B=(5 ; 6)$, $C=(7 ; 0)$.

45. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình các cạnh $AB : 3x+4y-6=0$; $AC : 4x+3y-1=0$; $BC : y=0$.

46. Biện luận theo m vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta_m : x-my+2m+3=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2+y^2+2x-2y-2=0$.

47. Cho ba điểm $A(-1; 0)$, $B(2 ; 4)$, $C(4 ; 1)$.

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn $(\mathscr{C})$. Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của $(\mathscr{C})$.

b) Một đường thẳng Δ thay đổi đi qua A cắt $(\mathscr{C})$ tại M và N. Hãy viết phương trình của Δ sao cho đoạn MN ngắn nhất.

48. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục toạ độ và

a) Đi qua $A(2 ; -1)$;

b) Có tâm thuộc đường thẳng $3x - 5y - 8 = 0$.

49. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm $A(6 ; 0)$ và đi qua điểm $B(9 ; 9)$.

50. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(-1 ; 0)$, $B(1 ; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

51. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$ tại $A \in (\mathscr{C})$ trong mỗi trường hợp sau rồi sau đó vẽ Δ và $(\mathscr{C})$ trên cùng hệ trục toạ độ

a) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 25, A(3 ; 4)$; d) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 80$, $A(-4 ; -8)$;

b) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 100, A(-8 ; 6)$; e) $(\mathscr{C}) : (x-3)^2 + (y+4)^2 = 169, A(8 ; -16)$;

c) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 50, A(5 ; -5)$; f) $(\mathscr{C}) : (x+5)^2 + (y-9)^2 = 289, A(-13 ; -6)$.

52. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0) \in (\mathscr{C})$.

Chứng minh rằng tiếp tuyến Δ của đường tròn $(\mathscr{C})$ tại M_0 có phương trình :

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

53. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng d :

$2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(\mathscr{C})$, biết Δ song song với d ; Tìm toạ độ tiếp điểm.

54. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm $A(1 ; 3)$.

a) Chứng minh rằng A ở ngoài đường tròn ;

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ kẻ từ A ;

c) Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm ở câu b), tính diện tích tam giác AT_1T_2.

55. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(\mathscr{C})$ trong mỗi trường hợp sau

a) Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ tại $M(2 ; 1)$;

b) Δ vuông góc với đường thẳng $d : 3x - 4y + 1 = 0$;

c) Δ đi qua $A(2 ; 6)$.

56. Cho hai đường tròn

$$(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0 \text{ và } (\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

a) Xét vị trí tương đối của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

57. Cho n điểm $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$,..., $A_n(x_n; y_n)$ và $n + 1$ số : $k_1, k_2,..., k_n, k$ thoả mãn $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + \ldots + k_nMA_n^2 = k.$$

58. Cho đường cong $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m + 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng $(\mathscr{C}_m)$ luôn là đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ khi m thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

d) Tìm những điểm trong mặt phẳng toạ độ mà họ $(\mathscr{C}_m)$ không đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

§5. Đường elip

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và số $2a$ $(a > c)$. Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$.

$$(E) = \{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}.$$

F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của (E).

2. Phương trình chính tắc của elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ (*h.* 83).

$a^2 = b^2 + c^2$; O là tâm đối xứng ; Ox, Oy là các trục đối xứng.

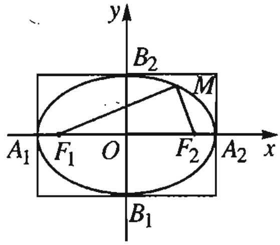
Trục lớn $A_1A_2 = 2a$ *nằm trên* Ox ;

Trục bé $B_1B_2 = 2b$ *nằm trên* Oy;

Các đỉnh : $A_1(-a\,;0), A_2(a\,;0), B_1(0\,;-b), B_2(0\,;b)$;

Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$;

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$;



Hình 83

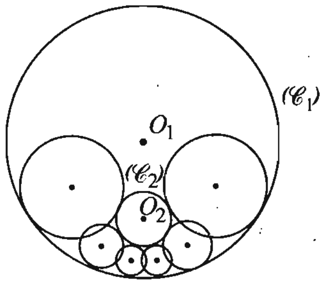
Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a, y = \pm b$;

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M\,;y_M) \in (E)$:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M \;;\; MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M .$$

II – ĐỀ BÀI

59. Cho đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ tâm O_1, bán kính R_1 và đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm O_2, bán kính R_2. Biết đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ nằm trong đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và tâm của hai đường tròn không trùng nhau (h. 84). Tìm tập hợp tâm của các đường tròn tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C}_2)$ và tiếp xúc trong với $(\mathscr{C}_1)$.



Hình 84

60. Xác định tâm đối xứng, độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm và các đỉnh của mỗi elip sau :

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

b) $x^2 + 4y^2 = 1$;

c) $4x^2 + 5y^2 = 20$;

d) $4x^2 + 16y^2 - 1 = 0$;

e) $x^2 + 3y^2 = 2$;

f) $mx^2 + ny^2 = 1$ $(n > m > 0, m \neq n)$.

Vẽ elip có phương trình ở câu a).

61. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết

a) $A(0 ; -2)$ là một đỉnh và $F(1 ; 0)$ là một tiêu điểm của (E) ;

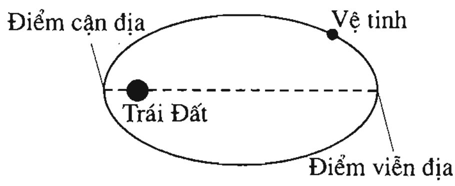
b) $F_1(-7 ; 0)$ là một tiêu điểm và (E) đi qua $M(-2 ; 12)$;

c) Tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$;

d) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 4$, $y = \pm 3$.

e) (E) đi qua hai điểm $M(4 ; \sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2} ; -3)$.

62. Mặt Trăng và các vệ tinh của Trái Đất chuyển động theo quỹ đạo là các đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Điểm gần Trái Đất nhất trên quỹ đạo gọi là *điểm cận địa*, điểm xa Trái Đất nhất trên quỹ đạo gọi là *điểm viễn địa* (h. 85).



Hình 85

a) Biết khoảng cách từ điểm viễn địa và điểm cận địa trên quỹ đạo của một vệ tinh đến tâm Trái Đất thứ tự là m và n. Chứng minh rằng tâm sai của quỹ đạo này bằng $\frac{m-n}{m+n}$.

b) Biết độ dài trục lớn và độ dài trục bé của quỹ đạo Mặt Trăng là 768806km và 767746km. Tính khoảng cách lớn nhất và khoảng cách bé nhất giữa tâm Trái Đất và tâm của Mặt Trăng.

63. Tìm những điểm trên elip $(E) : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ thoả mãn

a) Có bán kính qua tiêu điểm trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm phải.

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

c) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 60°.

64. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tuỳ ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng

a) $MF_1 . MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$;

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$;

c) $HM^2 = -\frac{b^2}{a^2}.\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$.

65. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh ; tính tâm sai và vẽ elip (E).

b) Xác định m để đường thẳng $d : y = x + m$ và (E) có điểm chung.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1 ; 1)$ và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

66. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad (a > b > 0)$.

a) Chứng minh rằng với mọi M thuộc (E), ta luôn có $b \le OM \le a$.

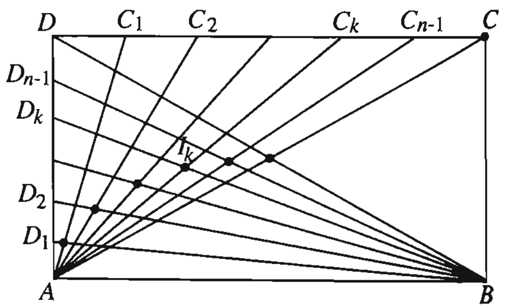
b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng có phương trình $\alpha x + \beta y = 0$ với (E). Tính OA theo a, b, α, β.

c) Gọi B là điểm trên (E) sao cho $OA \perp OB$. Chứng minh rằng tổng

$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ có giá trị không đổi.

d) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

67. Trên hình 86, cạnh DC của hình chữ nhật $ABCD$ được chia thành n đoạn thẳng bằng nhau bởi các điểm chia $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$; cạnh AD cũng được chia thành n đoạn thẳng bằng nhau bởi các điểm chia $D_1, D_2, ..., D_{n-1}$. Gọi I_k là giao điểm của đoạn thẳng AC_k với đoạn thẳng BD_k. Chứng minh rằng các điểm I_k $(k = 1, 2, ..., n - 1)$ nằm trên elip có trục lớn là cạnh AB, độ dài trục bé bằng chiều rộng AD của hình chữ nhật $ABCD$.



Hình 86

68. Phép co về trục Δ theo hệ số k $(k \neq 0)$ là phép cho tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, trong đó H là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép co đó. Chứng minh rằng

a) Phép co về trục Ox theo hệ số k biến điểm M thành điểm M' sao cho $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = ky_M \end{cases}$;

b) Phép co về trục Oy theo hệ số k biến điểm M thành điểm M' sao cho $\begin{cases} x_{M'} = kx_M \\ y_{M'} = y_M. \end{cases}$

69. Chứng minh rằng phép co về trục Ox theo hệ số $\frac{b}{a} < 1$, biến đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = a^2$ thành elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và ngược lại, phép co về trục Ox theo hệ số $\frac{a}{b} > 1$ biến elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thành đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = a^2$.

70. Tìm ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép co về trục Ox theo hệ số k trong mỗi trường hợp sau

a) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 9, k = \frac{2}{3}$;

b) $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 36 = 0$, $k = \frac{1}{6}$;

c) $(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, $k = -1$.

71. Tìm ảnh của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ qua phép co về trục Ox theo hệ số k trong mỗi trường hợp sau :

a) $k = \frac{5}{3}$;   b) $k = \sqrt{2}$;   c) $k = \frac{1}{2}$.

§6. Đường hypebol

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và hằng số 2a $(a < c)$. Hypebol (H) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

$$(H) = \{M : |MF_1 - MF_2| = 2a\}.$$

F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của (H).

2. *Phương trình chính tắc của hypebol :* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (h. 87)

$c^2 = a^2 + b^2$; *O là tâm đối xứng; Ox, Oy là các trục đối xứng.*

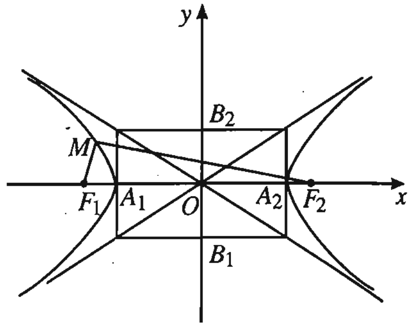
Trục thực $A_1A_2 = 2a$ *nằm trên Ox.*

Trục ảo $B_1B_2 = 2b$ *nằm trên Oy.*

Hai đỉnh : $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$.

Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$.

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$.



Hình 87

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$, $y = \pm b$.

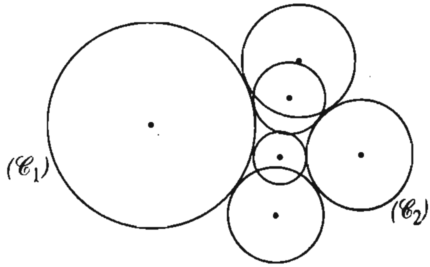
Phương trình hai đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$;

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M\,;y_M) \in (H)$:

$$MF_1 = |a + ex_M| = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| \;;\; MF_2 = |a - ex_M| = \left|a - \frac{c}{a}x_M\right|.$$

II – ĐỀ BÀI

72. (h.88) Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ nằm ngoài nhau và có bán kính không bằng nhau. Chứng minh rằng tâm của các đường tròn cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ nằm trên một hypebol với các tiêu điểm là tâm của các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$. Tâm đối xứng của hypebol này nằm ở đâu ?



Hình 88

73. Xác định độ dài trục thực, trục ảo ; tiêu cự ; tâm sai ; toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$;

b) $4x^2 - y^2 = 4$;

c) $16x^2 - 25y^2 = 400$;

d) $16x^2 - 9y^2 = 16$;

e) $x^2 - y^2 = 1$;

f) $mx^2 - ny^2 = 1$ $(m > 0, n > 0)$.

Vẽ các hypebol có phương trình ở câu a), b) và e).

74. Lập phương trình chính tắc của hypebol (*H*) biết

a) Một tiêu điểm là (5 ; 0), một đỉnh là (– 4 ; 0) ;

b) Độ dài trục ảo bằng 12, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$;

c) Một đỉnh là (2 ; 0), tâm sai bằng $\frac{3}{2}$;

d) Tâm sai bằng $\sqrt{2}$, (*H*) đi qua điểm $A(-5 ; 3)$;

e) (*H*) đi qua hai điểm $P(6 ; -1)$ và $Q(-8 ; 2\sqrt{2})$.

75. Lập phương trình chính tắc của hypebol (*H*) biết

a) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm 1$;

b) Một đỉnh là (3 ; 0) và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 16$;

c) Một tiêu điểm là (–10 ; 0) và phương trình các đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4x}{3}$;

d) (*H*) đi qua $N(6 ; 3)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^o.

76. Cho số $m > 0$. Chứng minh rằng hypebol (*H*) có các tiêu điểm $F_1(-m ; -m)$, $F_2(m ; m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên (*H*) tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình : $xy = \frac{m^2}{2}$.

77. Cho hypebol (*H*) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên (*H*) đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

78. Cho hai điểm $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$ và đường thẳng $\Delta : x - \frac{1}{4} = 0$.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MB = 2MH$, với H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho các đường thẳng AN và BN có tích các hệ số góc bằng 2.

79. Tìm các điểm trên hypebol $(H) : 4x^2 - y^2 - 4 = 0$ thoả mãn

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông ;

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120^o ;

c) Có toạ độ nguyên.

80. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh của (H). M là điểm tuỳ ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là N. Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1 . MF_2 = a^2 - b^2$;

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$;

c) $NM^2 = \dfrac{b^2}{a^2} . \overline{NA_1} . \overline{NA_2}$.

81. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ và đường thẳng $\Delta : x - y + m = 0$.

a) Chứng minh rằng Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) $(x_M < x_N)$;

b) Gọi F_1 là tiêu điểm trái và F_2 là tiêu điểm phải của (H). Xác định m để $F_2N = 2F_1M$.

82. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn $(\mathscr{C})$ cắt Ox tại $A(-1 ; 0)$ và $B(1 ; 0)$. Đường thẳng d có phương trình $x = m$ $(-1 < m < 1, m \neq 0)$ cắt $(\mathscr{C})$ tại M và N. Đường thẳng AM cắt đường thẳng BN tại K. Tìm tập hợp các điểm K khi m thay đổi.

83. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại P, Q và hai đường tiệm cận ở M và N. Chứng minh rằng

a) $MP = NQ$;

b) Nếu Δ có phương không đổi thì tích $\overline{PM} . \overline{PN}$ là hằng số.

§7. Đường parabol

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho điểm F cố định và một đường thẳng cố định Δ không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến F bằng khoảng cách từ M đến Δ.

$$(P) = \{M : MF = d(M\,;\Delta)\}.$$

F gọi là tiêu điểm, Δ là đường chuẩn, $p = d(F\,;\Delta) > 0$ gọi là tham số tiêu của (P).

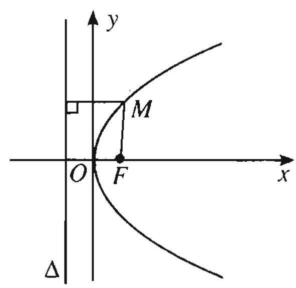
2. Phương trình chính tắc của parabol : $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ (*h.* 89).

Đỉnh : O(0; 0) ; Tham số tiêu p ;

Trục đối xứng : Ox ;

Tiêu điểm $F = \left(\frac{p}{2};0\right)$;

Đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$;



Hình 89

II – ĐỀ BÀI

84. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm O bán kính R và đường thẳng Δ không cắt ($\mathscr{C}$). Chứng minh rằng tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với Δ và tiếp xúc ngoài với ($\mathscr{C}$) nằm trên một parabol. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol đó.

85. Xác định tham số tiêu, toạ độ đỉnh, tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol sau

a) $y^2 = 4x$;

b) $2y^2 - x = 0$;

c) $5y^2 = 12x$;

d) $y^2 = \alpha x \quad (\alpha > 0)$.

Vẽ parabol có phương trình ở câu a).

86. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có tiêu điểm $F(1\ ;\ 0)$;

b) (P) có tham số tiêu $p = 5$;

c) (P) nhận đường thẳng $d : x = -2$ là đường chuẩn ;

d) Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1.

87. a) Dùng định nghĩa parabol để lập phương trình của parabol có tiêu điểm $F(2\ ;\ 1)$ và đường chuẩn $\Delta : x + y + 1 = 0$.

b) Chứng minh rằng parabol (P) có tiêu điểm $F\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$ và đường chuẩn $\Delta :\ y+\dfrac{1+b^2-4ac}{4a}=0$ có phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

88. Cho parabol $(P) : y^2 = 4x$. Lập phương trình các cạnh của một tam giác nội tiếp (P) (tam giác có ba đỉnh nằm trên (P)), biết một đỉnh của tam giác trùng với đỉnh của (P) và trực tâm tam giác trùng với tiêu điểm của (P).

89. Cho parabol $(P) : y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi $\alpha = \left(\vec{i}, \overrightarrow{FM}\right)$ $(0 < \alpha < \pi)$.

a) Tính FM, FN theo p và α ;

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh F thì $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FN}$ không đổi ;

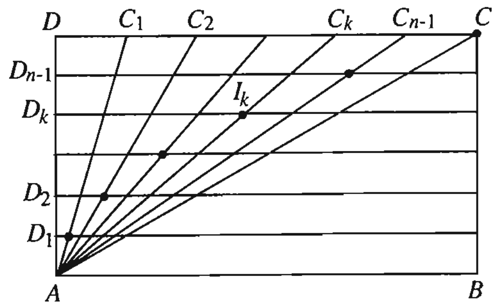
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi.

90. Cho parabol (P) có đường chuẩn Δ và tiêu điểm F. Gọi M, N là hai điểm trên (P) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua F.

91. Cho parabol $(P) : y^2 = x$ và hai điểm $A(1\ ;\ -1)$, $B(9\ ;\ 3)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thuộc cung AB của (P) (phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định vị trí của M trên cung AB sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

92. Qua một điểm A cố định trên trục đối xứng của parabol (P), ta vẽ một đường thẳng cắt (P) tại hai điểm M và N. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M và N tới trục đối xứng của (P) là hằng số.

93. Trên hình 90, cạnh DC của hình chữ nhật $ABCD$ được chia thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, cạnh AD cũng được chia thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$. Gọi I_k là giao điểm của đoạn AC_k với đường thẳng qua D_k và song song với AB. Chứng minh rằng các điểm I_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) nằm trên parabol có đỉnh A và trục đối xứng là AB.



Hình 90

§8. Ba đường cônic

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. *Cho điểm F cố định, một đường thẳng Δ cố định không đi qua F và một số dương e. Cônic* $(\mathcal{C})$ *là tập hợp các điểm M sao cho*

$$\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e.$$

$$(\mathcal{C}) = \left\{ M : \frac{MF}{d(M;\Delta)} = e \right\}.$$

Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của cônic $(\mathcal{C})$.

2. Cho cônic $(\mathcal{C})$ *với tâm sai e. Khi đó:*

$(\mathcal{C})$ *là elip* $\Leftrightarrow e < 1$;

$(\mathcal{C})$ *là parabol* $\Leftrightarrow e = 1$;

$(\mathcal{C})$ *là hypebol* $\Leftrightarrow e > 1$.

3. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

- *Đường chuẩn* Δ_1 *ứng với tiêu điểm trái* $F_1(-c\,;0)$ *có phương trình :*

  $x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}$;

  Đường chuẩn Δ_2 *ứng với tiêu điểm phải* $F_2(c\,;0)$ *có phương trình :*

  $x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$.

- *Với mọi điểm M thuộc (E) thì* $\frac{MF_1}{d(M\,;\Delta_1)}=\frac{MF_2}{d(M\,;\Delta_2)}=e<1$.

4. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

- *Đường chuẩn* Δ_1 *ứng với tiêu điểm trái* $F_1(-c\,;0)$ *có phương trình :*

  $x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}$;

  Đường chuẩn Δ_2 *ứng với tiêu điểm phải* $F_2(c\,;0)$ *có phương trình :*

  $x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$.

- *Với mọi điểm M thuộc (H) thì* $\frac{MF_1}{d(M\,;\Delta_1)}=\frac{MF_2}{d(M\,;\Delta_2)}=e>1$.

II – ĐỀ BÀI

94. Xác định toạ độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các cônic sau :

a) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{20}=1$; c) $y^2=6x$.

95. Viết phương trình của các đường cônic trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiêu điểm $F(3\,;1)$, đường chuẩn $\Delta: x=0$ và tâm sai $e=1$.

b) Tiêu điểm $F(-1\,;4)$, đường chuẩn ứng với tiêu điểm F là $\Delta: y=0$ và tâm sai $e=\frac{1}{2}$.

c) Tiêu điểm $F(2\,;-5)$, đường chuẩn ứng với tiêu điểm F là $\Delta: y=x$ và tâm sai $e=2$;

d) Tiêu điểm $F(-3\,;-2)$, đường chuẩn ứng với tiêu điểm F là

$\Delta: x-2y+1=0$ và tâm sai $e=\sqrt{3}$.

96. Chứng minh rằng mỗi đường chuẩn của hypebol luôn đi qua chân các đường vuông góc kẻ từ tiêu điểm tương ứng tới hai đường tiệm cận.

97. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm $F(c\ ;\ 0)$ của elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và cắt nó tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB không có điểm chung với đường chuẩn : $x = \dfrac{a}{e}$.

98. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và $F(c\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm của (H). Một đường thẳng đi qua F và cắt (H) tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB cắt đường chuẩn : $x = \dfrac{a}{e}$ của (H).

99. Cho A, B là hai điểm trên parabol $(P) : y^2 = 2px$ sao cho tổng các khoảng cách từ A và B tới đường chuẩn của (P) bằng độ dài AB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua tiêu điểm của (P).

Bài tập ôn tập chương III

100. Cho tam giác ABC có $A(-1\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 2)$, $C(-1/2\ ;\ -1)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC. Từ đó suy ra dạng của tam giác ;

b) Viết phương trình đường cao, đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác kẻ từ đỉnh A ;

c) Xác định toạ độ của tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

101. Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : (m + 1)x - 2y - m - 1 = 0\ ;$$

$$\Delta_2 : x + (m - 1)y - m^2 = 0.$$

a) Tìm toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

b) Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

102. Cho ba điểm $A(0\ ;\ a)$, $B(b\ ;\ 0)$, $C(c\ ;\ 0)$ (a, b, c là ba số khác 0 và $b \neq c$). Đường thẳng $y = m$ cắt các đoạn thẳng AB và AC lần lượt ở M và N.

a) Tìm toạ độ của M và N.

b) Gọi N' là hình chiếu (vuông góc) của N trên Ox và I là trung điểm của MN'. Tìm tập hợp các điểm I khi m thay đổi.

103. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ và điểm $M(4 ; 5)$.

a) Chứng minh rằng điểm M nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M ;

b) Viết phương trình đường tròn đối xứng với $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng $y = x$.

104. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = R^2$ và điểm $M(x_0 ; y_0)$ nằm ngoài $(\mathscr{C})$. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 tới $(\mathscr{C})$ (T_1 , T_2 là các tiếp điểm).

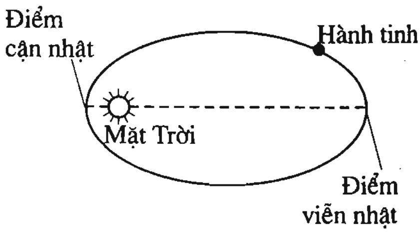
a) Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 ;

b) Giả sử M chạy trên một đường thẳng d cố định không cắt $(\mathscr{C})$. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

105. Các hành tinh và các sao chổi trong hệ Mặt Trời có quỹ đạo là các đường elip nhận tâm Mặt Trời làm một tiêu điểm. Điểm gần Mặt Trời nhất trên quỹ đạo gọi là *điểm cận nhật*. Điểm xa Mặt Trời nhất trên quỹ đạo gọi là điểm viễn nhật. Các điểm này là các đỉnh trên trục lớn của quỹ đạo (h. 91).

a) Tìm tâm sai của quỹ đạo Trái Đất biết rằng tỉ số các khoảng cách từ điểm cận nhật đến Mặt Trời và từ điểm viễn nhật đến Mặt Trời là $\frac{59}{61}$.

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời khi Trái Đất ở điểm cận nhật, ở điểm viễn nhật, biết rằng quỹ đạo có độ dài nửa trục lớn là 93000000 dặm.



Hình 91

106. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và hai điểm $M(-2 ; m)$, $N(2 ; n)$ $(m \neq -n)$.

a) Xác định tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh và phương trình đường chuẩn của (E).

b) Gọi A_1 và A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E) $(x_{A_1} < x_{A_2})$. Hãy viết phương trình của các đường thẳng A_1N và A_2M. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng.

c) Biết đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn cắt (E) tại một điểm duy nhất. Tìm tập hợp các giao điểm I.

107. *(Hệ thống định vị Hypebolic).* Hai thiết bị dùng để ghi âm một vụ nổ đặt cách nhau 1 dặm. Thiết bị A ghi được âm thanh vụ nổ trước thiết bị B là 2 giây. Biết vận tốc của âm thanh là 1100 feet/s , tìm các vị trí mà vụ nổ có thể xảy ra (1 dặm = 5280 feet, 3 feet = 0,914 m).

108. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và có hệ số góc k, Δ' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

a) Xác định toạ độ các tiêu điểm, tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của (H) ;

b) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H) ;

c) Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) là hình gì ? Tính diện tích của tứ giác này theo k ;

d) Xác định k để diện tích tứ giác nói ở câu c) có giá trị nhỏ nhất.

109. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

a) Tìm độ dài của dây cung vuông góc với trục đối xứng của (P) tại tiêu điểm F của (P).

b) A là một điểm cố định trên (P). Một góc vuông uAt quay quanh đỉnh A có các cạnh cắt (P) tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Các bài tập trắc nghiệm chương III

1. Đường thẳng đi qua $A(1\ ;\ -2)$ và nhận $\vec{n}(-2\,;4)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình là :

(A) $x + 2y + 4 = 0$; (C) $x - 2y - 5 = 0$;

(B) $x - 2y + 4 = 0$; (D) $-2x + 4y = 0$.

2. Đường thẳng đi qua $B(2;\ 1)$ và nhận $\vec{n}(1;-1)$ là vectơ chỉ phương có phương trình là :

(A) $x - y - 1 = 0$;　　(C) $x - y + 5 = 0$;

(B) $x + y - 3 = 0$;　　(D) $x + y - 1 = 0$.

3. Đường thẳng đi qua $C(3;\ -2)$ và có hệ số góc $k = \dfrac{2}{3}$ có phương trình là

(A) $2x + 3y = 0$;　　(C) $3x - 2y - 13 = 0$;

(B) $2x - 3y - 9 = 0$;　　(D) $2x - 3y - 12 = 0$.

4. Cho đường thẳng d có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$. Phương trình tổng quát của d là :

(A) $3x - y + 5 = 0$;　　(C) : $x + 3y - 5 = 0$;

(B) $x + 3y = 0$;　　(D) : $3x - y + 2 = 0$.

5. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát $4x + 5y - 8 = 0$. Phương trình tham số của d là :

(A) $\begin{cases} x = -5t \\ y = 4t \end{cases}$;　　(B) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4t \end{cases}$;　　(D) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -4t. \end{cases}$

6. Cho hai điểm $A(5\ ;\ 6)$, $B(-3\ ;\ 2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là :

(A) $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-6}{1}$;　　(C) $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y+6}{1}$;

(B) $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-6}{-1}$;　　(D) $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-2}{-1}$.

7. Cho điểm $M(1\ ;\ 2)$ và đường thẳng $d : 2x + y - 5 = 0$. Toạ độ của điểm đối xứng với điểm M qua d là :

(A) $\left(\dfrac{9}{5}\ ;\ \dfrac{12}{5}\right)$;　　(C) $\left(0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$;

(B) $(-2\ ;\ 6)$;　　(D) $(3\ ;\ -5)$.

8. Cho đường thẳng $d: -3x + y - 3 = 0$ và điểm $N(-2; 4)$. Toạ độ hình chiếu vuông góc của N trên d là :

(A) $(-3 ; -6)$; (B) $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{11}{3}\right)$;

(C) $\left(\frac{2}{5} ; \frac{21}{5}\right)$; (D) $\left(\frac{1}{10} ; \frac{33}{10}\right)$.

9. Cho hai đường thẳng $d_1 : mx + (m - 1)y + 2m = 0,$

$$d_2 : \ 2x + y - 1 = 0.$$

Nếu d_1 song song với d_2 thì

(A) $m = 1$; (B) $m = -2$;

(C) $m = 2$; (D) m tuỳ ý.

10. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - 4y - 3 = 0$ và $d_2 : \ 3x - y + 17 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là :

(A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{2}$;

(C) $\frac{3\pi}{4}$; (D) $-\frac{\pi}{4}$.

11. Cho đường thẳng $d : 4x - 3y + 13 = 0$. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d và trục Ox là :

(A) $4x + 3y + 13 = 0$ và $4x - y + 13 = 0$;

(B) $4x - 8y + 13 = 0$ và $4x + 2y + 13 = 0$;

(C) $x + 3y + 13 = 0$ và $x - 3y + 13 = 0$;

(D) $3x + y + 13 = 0$ và $3x - y + 13 = 0$.

12. Cho hai đường thẳng song song $d_1 : 5x - 7y + 4 = 0$ và $d_2 : 5x - 7y + 6 = 0$.

a) Phương trình đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 là :

(A) $5x - 7y + 2 = 0$; (B) $5x - 7y - 3 = 0$;

(C) $5x - 7y - 3 = 0$; (D) $5x - 7y + 5 = 0$.

b) Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là :

(A) $\frac{4}{\sqrt{74}}$; (B) $\frac{6}{\sqrt{74}}$;

(C) $\frac{2}{\sqrt{74}}$; (D) $\frac{10}{\sqrt{74}}$.

13. Cho hai điểm $A(6; 2)$, $B(-2; 0)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là :

(A) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 12 = 0$; (C) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 12 = 0$

(B) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 12 = 0$; (D) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 12 = 0$.

14. Đường tròn có tâm $I(x_I > 0)$ nằm trên đường thẳng $y = -x$, bán kính bằng 3 và tiếp xúc với một trục toạ độ có phương trình là :

(A) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$; (B) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$;

(C) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$; (D) $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 9$.

15. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng d : $x - y - 1 = 0$. Một tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ song song với d có phương trình là :

(A) $x - y + 6 = 0$; (B) $x - y + 3 - \sqrt{2} = 0$;

(C) $x - y + 4\sqrt{2} = 0$; (D) $x - y - 3 + 3\sqrt{2} = 0$.

16. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ và điểm $A(1 ; 3)$. Phương trình các tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ vẽ từ A là :

(A) $x - 1 = 0$ và $3x - 4y - 15 = 0$;

(B) $x - 1 = 0$ và $3x - 4y + 15 = 0$;

(C) $x - 1 = 0$ và $3x + 4y + 15 = 0$;

(D) $x - 1 = 0$ và $3x + 4y - 15 = 0$.

17. Elip (E) có độ dài trục lớn là 12, độ dài trục bé là 8, có phương trình chính tắc là :

(A) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; (B) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$;

(C) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8} = 1$; (D) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

18. Elip có hai tiêu điểm $F_1 = (-1 ; 0)$, $F_2 = (1 ; 0)$ và tâm sai $e = \dfrac{1}{5}$ có phương trình là :

(A) $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; (C) $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{25} = -1$;

(B) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{24} = 1$; (D) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{24} = -1$.

19. Elip có hai tiêu điểm là $O(0 ; 0)$, $F(4 ; 0)$ và một đỉnh là $A(-2 ; 0)$, có tâm sai là :

(A) $\frac{1}{3}$; (B) $\frac{2}{3}$;

(C) $\frac{3}{4}$; (D) $\frac{1}{2}$.

20. Elip (E) có độ dài trục bé bằng tiêu cự. Tâm sai của (E) là :

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (B) $\frac{2}{\sqrt{2}}$;

(C) $\frac{1}{3}$; (D) 1.

21. Hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ và một đỉnh là $A(1; 0)$ có phương trình là :

(A) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$; (B) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$; (D) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$.

22. Hypebol có hai tiệm cận vuông góc với nhau, độ dài trục thực bằng 6, có phương trình chính tắc là :

(A) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{1} = 1$; (C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$;

(B) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$; (D) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6} = 1$.

23. Hypebol $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ có phương trình hai đường chuẩn là :

(A) $x = \pm 1$; (C) $x = \pm 1$

(B) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; (D) $x = \pm 2$.

24. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hypebol : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ có phương trình :

(A) $x^2 + y^2 = 4$; (C) $x^2 + y^2 = 5$;

(B) $x^2 + y^2 = 1$; (D) $x^2 + y^2 = 3$.

25. Parabol (P) có tiêu điểm $F(2 ; 0)$ có phương trình chính tắc là :

(A) $y^2 = 16x$; (C) $y^2 = 4x$;

(B) $y^2 = 8x$; (D) $y^2 = 2x$.

26. Cônic có tâm sai $e = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ là :

(A) một elip ; (C) một parabol ;

(B) một hypebol ; (D) một đường tròn.

27. Cho đường thẳng Δ và một điểm F không thuộc Δ. Tập hợp các điểm M sao cho $MF = \dfrac{1}{\sqrt{2}} d(M ; \Delta)$ là :

(A) một elip ; (C) một parabol ;

(B) một hypebol ; (D) một đường khác.

B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (3 ; -6)$; $\overrightarrow{BC} = (-1 ; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (2 ; -2)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì đường cao AH qua A và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$-1(x + 1) + 4(y - 2) = 0 \text{ hay } x - 4y + 9 = 0.$$

Đường cao BH qua B và nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$2(x - 2) - 2(y + 4) = 0 \text{ hay } x - y - 6 = 0.$$

Đường cao CH qua C và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

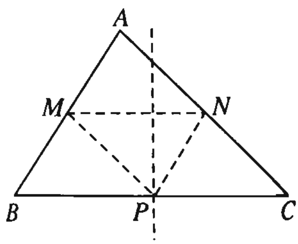
$$3(x - 1) - 6(y - 0) = 0 \text{ hay } x - 2y - 1 = 0.$$

2. (h. 92) Giả sử M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2 ; 8)$; $\overrightarrow{NP} = (8 ; -8)$; $\overrightarrow{MP} = (10 ; 0)$.

Đường trung trực của cạnh BC đi qua P và nhận $\overrightarrow{MN}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$2(x - 9) + 8(y - 1) = 0 \text{ hay } x + 4y - 13 = 0.$$



Hình 92

Tương tự, ta được phương trình các đường trung trực của các cạnh AB, AC lần lượt là : $x - y + 2 = 0$, $x - 1 = 0$.

3. Xét điểm $M(x_M ; y_M)$ tuỳ ý thuộc Δ.

a) Gọi $N(x_N ; y_N)$ là điểm đối xứng với M qua Ox. Khi đó $\begin{cases} x_N = x_M \\ y_N = -y_M \end{cases}$.

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0$

$$\Leftrightarrow ax_N - by_N + c = 0 \Leftrightarrow N \in \Delta_1 : ax - by + c = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Ox là $ax - by + c = 0$.

b) Gọi $P(x_P ; y_P)$ là điểm đối xứng với M qua Oy.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_P = -x_M \\ y_P = y_M. \end{cases}$

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_P + by_P + c = 0$

$$\Leftrightarrow ax_P - by_P - c = 0 \Leftrightarrow P \in \Delta_2 : ax - by - c = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Oy là $ax - by - c = 0$.

c) Gọi $Q(x_Q ; y_Q)$ là điểm đối xứng với M qua O. Khi đó ta có $\begin{cases} x_Q = -x_M \\ y_Q = -y_M. \end{cases}$

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_Q - by_Q + c = 0$

$$\Leftrightarrow ax_Q + by_Q - c = 0 \Leftrightarrow Q \in \Delta_3 : ax + by - c = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua O là $ax + by - c = 0$.

4. *Cách 1.* Rõ ràng $A \notin \Delta$, lấy $M(1 ; 1) \in \Delta$. Khi đó điểm M' đối xứng với M qua A có toạ độ $M' = (1 ; 5)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua A sẽ đi qua M' và song song với Δ. Ta tìm được phương trình Δ' là $x - 2y + 9 = 0$.

Cách 2. Xét điểm $M(x_1 ; y_1)$ tuỳ ý thuộc Δ và gọi $M'(x_2 ; y_2)$ là điểm đối xứng của M qua A. Suy ra $x_1 = 2 - x_2$, $y_1 = 6 - y_2$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - x_2 - 2(6 - y_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 - 2y_2 + 9 = 0$
$\Leftrightarrow M' \in \Delta' : x - 2y + 9 = 0$.

5. a) Cắt nhau ; b) Song song ; c) Trùng nhau.

d) Nếu $m \neq -1$ thì d_1 cắt d_2, nếu $m = -1$ thì $d_1 // d_2$.

6. $D = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ 2m+6 & 1 \end{vmatrix} = 4.1 - (-m)(2m+6) = 2m^2 + 6m + 4$

$= 2(m+1)(m+2)$.

$D_x = \begin{vmatrix} -m & 4-m \\ 1 & -2m-1 \end{vmatrix} = (-m)(-2m-1) - 1(4-m)$

$= 2m^2 + 2m - 4 = 2(m-1)(m+2)$.

$D_y = \begin{vmatrix} 4-m & 4 \\ -2m-1 & 2m+6 \end{vmatrix} = (4-m)(2m+6) - 4(-2m-1)$

$= -2m^2 + 10m + 28 = -2(m-7)(m+2)$.

– Xét $D \neq 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq -2$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 cắt nhau và giao điểm của Δ_1 và Δ_2 có toạ độ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2(m-1)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} = \dfrac{m-1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2(m-7)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} = \dfrac{7-m}{m+1}. \end{cases}$$

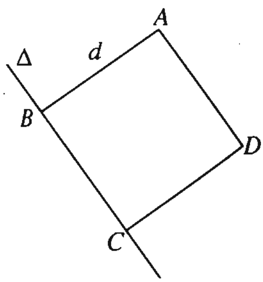
– Xét $D = 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -2$.

Với $m = -1$ thì $D_x = 2.(-2).1 = -4 \neq 0$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Với $m = -2$ thì $D = D_x = D_y = 0$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

7. (h. 93)

a) Đường thẳng d qua A và vuông góc với Δ có phương trình $2(x+1) + y - 3 = 0$ hay $2x + y - 1 = 0$.



Hình 93

Toạ độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $B = (0 ; 1)$.

$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Toạ độ của C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x_C - 2y_C + 2 = 0 \\ \sqrt{x_C^2 + (y_C - 1)^2} = \sqrt{5}. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 2 \end{cases}$. Nghiệm đầu bị loại do $y_C = 0$.

Vậy $C = (2 ; 2)$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Suy ra $\begin{cases} x_D - 2 = -1 - 0 \\ y_D - 2 = 3 - 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4. \end{cases}$ Vậy $D = (1 ; 4)$.

b) Chu vi hình vuông $ABCD$ bằng $4\sqrt{5}$, diện tích bằng 5.

8. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của Δ với các trục Ox, Oy, ta có $M = \left(-\dfrac{c}{a} ; 0\right)$, $N = \left(0 ; -\dfrac{c}{b}\right)$. Tam giác tạo bởi Δ và các trục Ox, Oy là tam giác vuông OMN có diện tích $S = \dfrac{1}{2}OM.ON = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{c}{a}\right|\left|-\dfrac{c}{b}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{c^2}{|ab|}$.

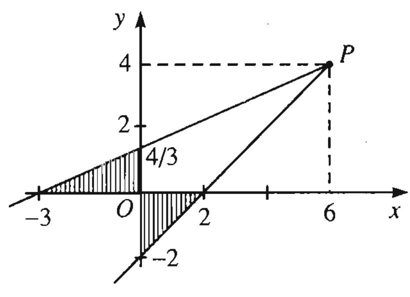
9. (h. 94) Giả sử $\Delta \cap Ox = A(a ; 0)$, $\Delta \cap Oy = B(0 ; b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Phương trình của Δ : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

$P \in \Delta \Rightarrow \dfrac{6}{a} + \dfrac{4}{b} = 1.$ (1)

$S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}|ab| = 2$

$\Rightarrow |ab| = 4.$ (2)



Hình 94

Từ (1) suy ra $b = \dfrac{4a}{a-6}$ ($a \neq 6$ vì nếu $a = 6$ thì (1) trở thành $\dfrac{4}{b} = 0$: vô lí).

Thay vào (2) ta được $\left|a.\dfrac{4a}{a-6}\right| = 4 \Leftrightarrow a^2 = |a - 6|$. (3)

Với $a > 6$ thì (3) $\Leftrightarrow a^2 - a + 6 = 0$: phương trình vô nghiệm.

Với $a < 6$ thì (3) $\Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0$, khi đó $a = 2$ hoặc $a = -3$.

– Trường hợp $a = 2 \Rightarrow b = -2$, ta có đường thẳng Δ_1 : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$.

– Trường hợp $a = -3 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$, ta có đường thẳng Δ_2 : $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$.

10. Giả sử $M = (m\ ;\ 0)$, $N = (0\ ;\ n)$ với $m, n > 0$. Phương trình của Δ là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

$Q \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow n = \frac{3m}{m-2}$ (dễ thấy $m \neq 2$). Do $n > 0$ nên $m > 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$OM + ON = m + n = m + \frac{3m}{m-2}$$

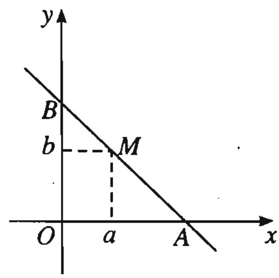
$$= m - 2 + \frac{6}{m-2} + 5 \geq 2\sqrt{(m-2).\frac{6}{m-2}} + 5 = 2\sqrt{6} + 5.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = \frac{6}{m-2}$ hay $m = 2 + \sqrt{6}$ (do $m > 0$).

Suy ra $n = 3 + \sqrt{6}$. Vậy $OM + ON$ nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6} + 5$ khi $m = 2 + \sqrt{6}$ và $n = 3 + \sqrt{6}$. Khi đó phương trình của Δ là $\frac{x}{2+\sqrt{6}} + \frac{y}{3+\sqrt{6}} = 1$.

11. (h. 95) Gọi $A = (x_0\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ y_0)$.

Khi đó $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$.



Hình 95

$$M \in AB \Rightarrow \frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} = 1.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}x_0y_0.$$

Ta có : $1 = \frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{x_0y_0}} \Rightarrow x_0y_0 \geq 4ab$.

Do đó $S_{OAB} = \frac{1}{2}x_0y_0 \geq \frac{1}{2}4ab = 2ab$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x_0} = \frac{b}{y_0} = \frac{1}{2}$ hay $\begin{cases} x_0 = 2a \\ y_0 = 2b. \end{cases}$

Vậy, diện tích tam giác OAB nhỏ nhất bằng $2ab$ khi $\begin{cases} x_0 = 2a \\ y_0 = 2b. \end{cases}$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{2b} = 1$.

12. a) Học sinh tự làm.

b) (h. 96) *Cách 1.* $A(x_A\,;\,y_A) \in d_1 \Rightarrow y_A = 2x_A - 2\,;$

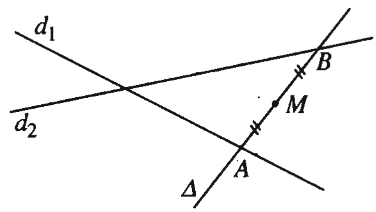
$B(x_B\,;\,y_B) \in d_2 \Rightarrow y_B = -x_B - 3.$

Vì M là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ 2x_A - 2 - x_B - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_A = \dfrac{11}{3} \Rightarrow y_A = \dfrac{16}{3}$.

Vậy $A = \left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{16}{3}\right)$.

Đường thẳng MA trùng với đường thẳng Δ. Từ đó ta tìm được phương trình của Δ là $8x - y - 24 = 0$.



Hình 96

Cách 2. Dễ thấy đường thẳng Δ cần tìm không vuông góc với Ox. Gọi k là hệ số góc của Δ thì phương trình của Δ có dạng : $y = k(x - 3)$.

Gọi $A = \Delta \cap d_1$, $B = \Delta \cap d_2$. Khi đó hoành độ của A là nghiệm của phương trình : $2x - 2 = k(x - 3)$.

Suy ra $x_A = \dfrac{3k - 2}{k - 2}$ ($k \neq 2$ vì nếu $k = 2$ thì phương trình $2x - 2 = k(x - 3)$ vô nghiệm).

Hoành độ của B là nghiệm của phương trình $-x - 3 = k(x - 3)$.

Suy ra $x_B = \dfrac{3k - 3}{k + 1}$ ($k \neq -1$ vì nếu $k = -1$ thì phương trình $-x - 3 = k(x - 3)$ vô nghiệm). Từ giả thiết M là trung điểm của AB suy ra :

$$x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{3k - 2}{k - 2} + \frac{3k - 3}{k + 1} = 6 \Leftrightarrow k = 8.$$

Vậy phương trình của Δ là $y = 8(x - 3)$ hay $8x - y - 24 = 0$.

13. (h. 97) $A(0\ ;\ 0)$, $C(6\ ;\ 0) \Rightarrow A, C \in Ox \Rightarrow P, Q \in Ox \Rightarrow P = (x_P\ ;\ 0)$, $Q = (x_Q\ ;\ 0)$ với $0 < x_P < x_Q < 6$.

Phương trình đường thẳng AB : $y = 2x$;

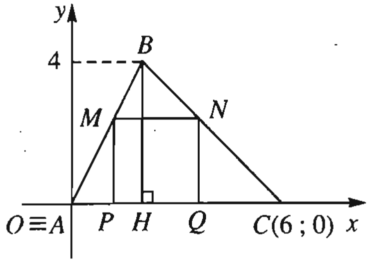
Phương trình đường thẳng AC : $y = 0$.

Gọi cạnh hình vuông là a. Ta có :

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{BM}{BA} \quad (1).$$

Kẻ $BH \perp AC$, suy ra $BH = 4$. Ta có :

$$\frac{MP}{BH} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{AM}{AB} \quad (2).$$



Hình 97

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{a}{6} + \frac{a}{4} = \frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1$. Do đó $a = \frac{12}{5}$.

Vậy $y_M = y_N = \frac{12}{5}$. Do $M \in AB$ nên $y_M = 2x_M$, suy ra $x_M = \frac{6}{5}$,

$x_P = x_M = \frac{6}{5}$. Vì $PQ = x_Q - x_P$ nên $x_Q = x_P + a = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$.

Các điểm cần tìm là : $M\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$, $P\left(\frac{6}{5};0\right)$, $Q\left(\frac{18}{5};0\right)$, $N\left(\frac{18}{5};\frac{12}{5}\right)$.

§2. Phương trình tham số của đường thẳng

14. a) $x + 2y - 7 = 0$; b) $x + y = 0$; c) $x + 3 = 0$; d) $y - 4 = 0$.

15. a) *Cách 1*. Lấy hai điểm, chẳng hạn $M(0\ ;\ -2)$ và $N(1\ ;\ 1)$ thuộc đường thẳng $\Delta : 3x - y - 2 = 0$. Khi đó $\overrightarrow{MN}(1\ ;\ 3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t. \end{cases}$

Cách 2. Cho $y = t$, ta được $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$. Đường thẳng đã cho có phương trình tham số $\begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ y = t. \end{cases}$

Chú ý : Các phương trình tìm được ở cách 1 và cách 2 tuy khác nhau nhưng đều là các phương trình tham số của cùng một đường thẳng đã cho.

b) $\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = t \\ y = 6. \end{cases}$

16. a) d song song với đường thẳng $5x + 1 = 0$ nên nó nhận $\vec{u}(0\,;-5)$ là một vectơ chỉ phương. Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 5t \end{cases}$ và không có phương trình chính tắc.

b) d vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ nên nó nhận vectơ pháp tuyến $\vec{u}(1\,;3)$ của đường thẳng này làm vectơ chỉ phương. Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$ và phương trình chính tắc $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y+5}{3}$.

c) d đi qua $C(-2\,;3)$ và có hệ số góc $k = -3$ nên d có phương trình $y = -3(x + 2) + 3$ hay $3x + y + 3 = 0$. Do đó $\vec{u}(-1\,;3)$ là một vectơ chỉ phương của d. Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ và phương trình chính tắc $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{3}$.

d) $\overrightarrow{MN}(2\,;-9)$ là vectơ chỉ phương của d, nên d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 - 9t \end{cases}$ và phương trình chính tắc : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{-9}$.

17. d_1 đi qua $M_1(x_1\,;y_1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;b)$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{v}(c\,;d)$.

a) d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ *và* $\vec{v}$ không cùng phương $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

b) $d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1\,;y_1) \notin d_2$

$\Leftrightarrow ad - bc = 0$ và $d(x_1 - x_2) \neq c(y_1 - y_2)$.

c) $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ *và* $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1\,;y_1) \in d_2$

$\Leftrightarrow ad - bc = 0$ và $d(x_1 - x_2) = c(y_1 - y_2)$.

d) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ac + bd = 0$.

18. a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(2\,;-3)$, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(1\,;\,2)$. $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau. Toạ độ giao điểm M của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t của phương trình :

$$2(1+2t)-(-3-3t)-1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{7}.\ \text{Suy ra } M=\left(-\frac{1}{7}\,;-\frac{9}{7}\right).$$

b) $\Delta_1 // \Delta_2$.

c) Toạ độ giao điểm N của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t, t' của hệ phương trình : $\begin{cases}-2+t=4t'\\ -t=2-t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\dfrac{10}{3}\\ t'=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

Thay t vào phương trình của Δ_1 (hoặc thay t' vào phương trình của Δ_2), ta được toạ độ của N là $\left(-\dfrac{16}{3}\,;\dfrac{10}{3}\right)$.

d) $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

19. a) Toạ độ của M ứng với nghiệm t, t' của hệ $\begin{cases}2-3t=-1-2t'\\ 1+t=3-t'\end{cases}$. Giải hệ ta được $t=\dfrac{7}{5}$, $t'=\dfrac{3}{5}$. Từ đó ta tính được $M=\left(-\dfrac{11}{5}\,;\dfrac{12}{5}\right)$.

b) d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(-3\,;\,1)$.

Đường thẳng Δ_1 qua M và vuông góc với d_1 nên Δ_1 có phương trình tổng quát :

$$-3\left(x+\frac{11}{5}\right)+1.\left(y-\frac{12}{5}\right)=0 \text{ hay } 3x-y+9=0.$$

Từ phương trình tổng quát, cho $x=t$, ta được phương trình tham số của Δ_1 là

$$\begin{cases}x=t\\ y=9+3t.\end{cases}$$

Tương tự, đường thẳng Δ_2 qua M và vuông góc với d_2 có phương trình tổng quát : $2x+y+2=0$ và phương trình tham số : $\begin{cases}x=t'\\ y=-2-2t'.\end{cases}$

20. a) Có hai điểm $A_1(0 ; -1)$, $A_2(1 ; -2)$.

b) MB nhỏ nhất khi B trùng với hình chiếu vuông góc H của M trên Δ.

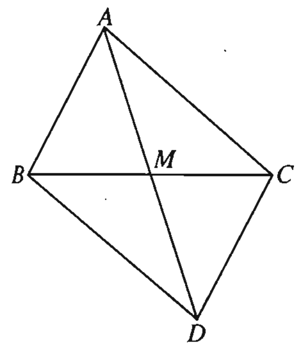
Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-2 ; 2)$. Vì $H \in \Delta$ nên $H = (-2 - 2t ; 1 + 2t)$. Ta có $\overrightarrow{MH} = (-5-2t ; 2t)$. Do $MH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = -2.(-5 - 2t) + 2.2t = 0$ hay $t = -\dfrac{5}{4}$. Vậy $H = \left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$.

21. (h. 98) *Cách 1*. Xét tam giác ABC với phương trình các cạnh

$$AB : 2x + 6y + 3 = 0 \;,\; AC : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$$

và $M(-1 ; 1)$ là trung điểm của cạnh BC. Khi đó, ta có hệ :

$$\begin{cases} x_B + x_C = -2 & (1) \\ y_B + y_C = 2 & (2) \\ 2x_B + 6y_B + 3 = 0 & (3) \\ x_C = 2 - t & (4) \\ y_C = t & (5). \end{cases}$$



Hình 98

Thay x_C , y_C từ (4), (5) vào (1), (2) và sau đó kết hợp với (3) ta được $t = \dfrac{7}{4}$.

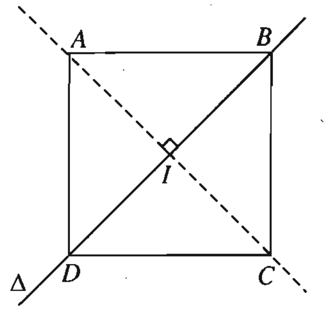
Do đó $C = \left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{7}{4}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{MC} = \left(\dfrac{5}{4} ; \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4}(5 ; 3)$. Phương trình của đường thẳng BC là $\begin{cases} x = -1 + 5t' \\ y = 1 + 3t' \end{cases}$.

Cách 2. Từ phương trình của AB, AC, ta tìm được toạ độ của A và suy ra toạ độ của D (D đối xứng với A qua M). M là trung điểm của BC và AD nên $ABDC$ là hình bình hành, do đó $DC // AB$. Từ đó viết được phương trình của DC và tìm được toạ độ điểm C. Cuối cùng viết được phương trình của MC.

22. Ta dễ tính được $B = (2; 1)$, $C = (0 ; 5)$, trọng tâm $G = (1 ; 4)$, suy ra $A = (1; 6)$.

Từ đó viết được phương trình các cạnh $AB : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 - 5t \end{cases}$, $AC : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 6 - t'. \end{cases}$

23. (h. 99) $A \notin \Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases}$. Vậy $B, D \in \Delta$.



Hình 99

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\,;-2)$ nên phương trình đường chéo AC là

$$2(x + 1) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0.$$

Toạ độ giao điểm I của AC và BD ứng với nghiệm t của phương trình :

$$-1 + 2t + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $I = (-2\,;\,1)$. Vì I là trung điểm của AC, nên $C = (-3\,;\,0)$.

$ABCD$ là hình vuông nên $ID = IB = IA$. Do $B \in \Delta$ nên $B = (-1 + 2t\,;\,-2t)$.

$$IB^2 = IA^2 \Leftrightarrow (-1 + 2t + 2)^2 + (-2t - 1)^2 = (-1 + 2)^2 + (2 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1.$$

Suy ra $B = (-1\,;\,0)$ hoặc $B = (-3\,;\,2)$.

Nếu $B = (-1\,;\,0)$ thì $D = (-3\,;\,2)$, nếu $B = (-3\,;\,2)$ thì $D = (-1\,;\,0)$.

Đến đây, biết toạ độ bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$, ta sẽ dễ dàng viết được phương trình bốn cạnh của hình vuông là :

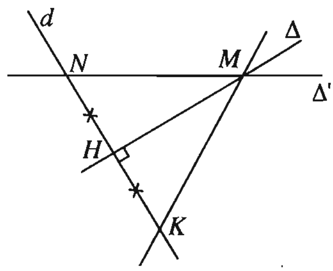
$$x + 1 = 0\,; \quad y = 0\,; \quad x + 3 = 0\,; \quad y - 2 = 0.$$

24. (h. 100) Dễ tìm được giao điểm M của Δ và Δ' có toạ độ là $(-6\,;\,4)$. Điểm $N(-2\,;\,0)$ thuộc Δ' và N khác M.

Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với Δ có phương trình :

$$-2(x + 2) + y = 0 \text{ hay } 2x - y + 4 = 0.$$

Gọi $H = d \cap \Delta$, suy ra $H = \left(-\frac{6}{5}\,;\,\frac{8}{5}\right)$. Do đó toạ độ điểm K đối xứng với điểm N qua H là $\left(-\frac{2}{5}\,;\,\frac{16}{5}\right)$.



Hình 100

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng MK và có phương trình : $x + 7y - 22 = 0$.

25. a) Phương trình của Δ có dạng tổng quát là $x - y + 1 = 0$. Rõ ràng $A, B \notin \Delta$. Xét $C(x\,;\,x + 1) \in \Delta$.

• ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = 4^2 + 1^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Có hai điểm thoả mãn là $C_1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{\sqrt{30}+2}{2}\right)$, $C_2 = \left(-\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{2-\sqrt{30}}{2}\right)$.

• ΔABC cân tại $B \Leftrightarrow BC^2 = BA^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + x^2 = 17$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 4.$$

Có hai điểm thoả mãn là $C_3 = (-1 ; 0), C_4 = (4 ; 5)$.

• ΔABC cân tại $C \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = (x-3)^2 + x^2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}.$$

Có một điểm thoả mãn là $C_5 = \left(\frac{7}{6} ; \frac{13}{6}\right)$.

b) ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} CA = CB \\ CA = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ x = \pm\frac{\sqrt{30}}{2} \end{cases}$: hệ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại điểm C trên Δ sao cho tam giác ABC đều.

§3. Khoảng cách và góc

26. a) Thay lần lượt toạ độ của A, B, C vào vế trái phương trình của Δ, ta được :

$$-1 - 3 = -4 ; \quad 2 - 2.3 - 3 = -7 ; \quad 3 - 2.(-6) - 3 = 12.$$

Vậy A, B nằm về một phía của Δ, còn C nằm về phía kia. Do đó Δ cắt hai cạnh AC và BC của tam giác ABC.

b) *Cách 1.* Xét $M(2y+3 ; y) \in \Delta$ thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-6y-5 ; -3y-3)$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(6y+5)^2 + (3y+3)^2} = \sqrt{45y^2 + 78y + 34}$.

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 45y^2 + 78y + 34$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = -\frac{13}{15}$.

Từ đó ta tìm được $M = \left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$.

Cách 2. Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm tam giác ABC) nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên Δ. Ta tìm được $M = \left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$.

27. a) $\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;2)$. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó A, B, C không thẳng hàng và là ba đỉnh của một tam giác.

b) Phương trình đường thẳng $AB : x - 2y - 2 = 0$.

Phương trình đường thẳng $AC : 2x + y - 4 = 0$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là :

$$\frac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{2x+y-4}{\sqrt{2^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3y-2=0 & (1) \\ 3x-y-6=0 & (2) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B và C vào vế trái của (1) ta được :

$$4 + 3.1 - 2 = 5\ ; \quad 1 + 3.2 - 2 = 5.$$

Do đó B, C cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1), vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là $3x - y - 6 = 0$.

c) $\overrightarrow{BC} = (-3\ ;\ 1)$. Phương trình đường thẳng BC là $x + 3y - 7 = 0$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc B là

$$\frac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{x+3y-7}{\sqrt{1^2+3^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (\sqrt{2}-1)x-(2\sqrt{2}+3)y+7-2\sqrt{2}=0 & (3) \\ (\sqrt{2}+1)x+(3-2\sqrt{2})y-7-2\sqrt{2}=0 & (4) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của A và C vào vế trái của (3) ta được :

$$(\sqrt{2}-1).2 + 7 - 2\sqrt{2} = 5\ ;\ (\sqrt{2}-1).1 - (2\sqrt{2}+3).2 + 7 - 2\sqrt{2} = -5\sqrt{2}.$$

Suy ra phương trình đường phân giác trong của góc B là

$$(\sqrt{2}-1)x - (2\sqrt{2}+3)y + 7 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác trong. Toạ độ của I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ (\sqrt{2}-1)x - (2\sqrt{2}+3)y + 7 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{3}{2+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Vậy $I = \left(\dfrac{5+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} ; \dfrac{3}{2+\sqrt{2}} \right)$.

28. Xét tam giác ABC với phương trình các cạnh của tam giác như đã cho. Khi đó, toạ độ các đỉnh của tam giác là nghiệm của các hệ :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải các hệ này ta được toạ độ các đỉnh tam giác là (0 ; 0) , (2 ; –1) ; (–1 ; 2).

Giả sử $A = (0 ; 0)$, $B = (2 ; -1)$; $C = (-1 ; 2)$. Suy ra

$\overrightarrow{AB} = (2 ; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 ; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3 ; 3)$.

$AB = AC = \sqrt{5}$ nên tam giác ABC cân tại A.

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2.(-1) + (-1).2}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{1^2+2^2}} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{A} \approx 143^\circ 8'$$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \approx 18^\circ 26'$.

29. Δ có phương trình tổng quát : $x + y + 1 = 0$. Do đó

$$d(A ; \Delta) = \frac{|-1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Đường tròn tâm A tiếp xúc với Δ nên có bán kính $R = \sqrt{2}$. Diện tích của hình tròn này là $S = \pi R^2 = 2\pi$.

30. Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua Δ khi và chỉ khi có hai điều kiện :

– Trung điểm I của MN nằm trên Δ ;

– Vectơ $\overrightarrow{MN}$ là vectơ pháp tuyến của Δ.

Từ đó ta được các điều kiện sau :

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) + c = 0 \\ b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$$

31. a) Ta tìm được toạ độ các đỉnh của tam giác ABC là : $A(1 ; 5)$, $B(-3 ; 1)$, $C(2 ; -2)$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là :

$$\frac{x - y + 4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x + y - 12}{\sqrt{49 + 1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x - y + 4) = 7x + y - 12 \\ 5(x - y + 4) = -(7x + y - 12) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3y - 16 = 0 & (1) \\ 3x - y + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B và C vào vế trái của phương trình (1) ta được :

$$-3 + 3 - 16 = -16 ; \qquad 2 - 6 - 16 = -20,$$

suy ra B và C ở cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1).

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là : $3x - y + 2 = 0$.

b) Thay lần lượt toạ độ của O vào vế trái phương trình của BC, AC, AB ta được :

$$4 ; \qquad -12 ; \qquad 4.$$

Thay toạ độ của A, B, C lần lượt vào vế trái phương trình của BC, AC, AB ta được :

$$3 + 5.5 + 4 = 32 ; \qquad 7.(-3) + 1 - 12 = -32 ; \qquad 2 + 2 + 4 = 8.$$

Như vậy : O và A nằm cùng phía đối với BC ; O và B nằm cùng phía đối với AC ; O và C nằm cùng phía đối với AB. Vậy O nằm trong tam giác ABC.

32. a) Đường thẳng Δ đi qua $A(-2 ; 0)$ có phương trình :

$$\alpha(x + 2) + \beta y = 0 \quad \text{hay} \quad \alpha x + \beta y + 2\alpha = 0 \ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Δ tạo với d góc $45^\circ \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \dfrac{|\alpha + 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{10}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{|\alpha + 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{10}}$

$$\Leftrightarrow 5(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + 3\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 2\beta \\ \alpha = -\dfrac{1}{2}\beta. \end{array}\right.$$

Với $\alpha = 2\beta$, chọn $\beta = 1$, $\alpha = 2$, ta được đường thẳng $\Delta_1 : 2x + y + 4 = 0$.

Với $\alpha = -\frac{1}{2}\beta$, chọn $\beta = -2$, $\alpha = 1$, ta được đường thẳng $\Delta_2 : x - 2y + 2 = 0$.

b) Gọi $\vec{u}(a\,;b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ cần tìm $(a^2 + b^2 \neq 0)$.
d có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (3\,;-2)$.

Δ tạo với d góc 60° khi và chỉ khi $\cos 60^\circ = \dfrac{|3a - 2b|}{\sqrt{3^2 + 2^2}.\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow 13(a^2 + b^2) = 4(3a - 2b)^2$$

$$\Leftrightarrow 23a^2 - 48ab + 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{24 - \sqrt{507}}{23}b \\ a = \dfrac{24 + \sqrt{507}}{23}b. \end{array}\right.$$

Với $a = \dfrac{24 - \sqrt{507}}{23}b$, chọn $b = 1$, $a = \dfrac{24 - \sqrt{507}}{23}$, ta được đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -1 + \dfrac{24 - \sqrt{507}}{23}t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

Với $a = \dfrac{24 + \sqrt{507}}{23}b$, chọn $b = 1$, $a = \dfrac{24 + \sqrt{507}}{23}$, ta được đường thẳng

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = -1 + \dfrac{24 + \sqrt{507}}{23}t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

33. Đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;-2)$, đường thẳng $\Delta_2 : 3x + 4y + 12 = 0$ có vectơ chỉ phương $\vec{v}(4\,;-3)$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45° khi và chỉ khi

$$\cos 45^\circ = \frac{|4a + 6|}{\sqrt{a^2 + 2^2}.\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a + 6|}{5\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2+4) = 2(4a+6)^2 \Leftrightarrow 7a^2+96a-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{7} \\ a = -14. \end{array}\right.$$

Có hai giá trị cần tìm là $a = \dfrac{2}{7}$ và $a = -14$.

34. a) Đường thẳng Δ đi qua $A(1\ ;\ 1)$ có phương trình :

$\alpha(x-1) + \beta(y-1) = 0$ hay $\alpha x + \beta y - \alpha - \beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Ta có $d(B;\Delta) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3\alpha + 6\beta - \alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (2\alpha + 5\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$

$$\Leftrightarrow \beta(21\beta + 20\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 0 \\ 21\beta + 20\alpha = 0. \end{array}\right.$$

Với $\beta = 0$, chọn $\alpha = 1$, ta được đường thẳng $\Delta_1 : x - 1 = 0$.

Với $21\beta + 20\alpha = 0$, chọn $\alpha = 21$, $\beta = -20$ ta được đường thẳng Δ_2 :

$$21x - 20y - 1 = 0.$$

b) $M(x\ ;\ y) \in \Delta \Leftrightarrow d(M\ ;\ d) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{|8x-6y-5|}{\sqrt{64+36}} = 5 \Leftrightarrow 8x - 6y - 5 = \pm 50$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là

$$\Delta_1 :\ 8x - 6y + 45 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 :\ 8x - 6y - 55 = 0.$$

35. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình : $\alpha x + \beta y - \alpha - \beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Từ giả thiết $d(B\ ;\ \Delta) = d(C\ ;\ \Delta)$, ta tìm được $\alpha = -4\beta$ hoặc $3\alpha + 2\beta = 0$.

Suy ra có hai đường thẳng thoả mãn bài toán là Δ_1 :

$$4x - y - 3 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 2x - 3y + 1 = 0.$$

36. a) Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1\ ;\ 2)$, đường thẳng BC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2(3\ ;-1)$. Đường thẳng AC qua M nên có phương trình : $\alpha(x-1) + \beta(y+3) = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Tam giác ABC cân tại đỉnh A nên ta có :

$$\cos(AB,BC) = \cos(AC,BC) \Leftrightarrow \frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|3\alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{5}|3\alpha - \beta| \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(3\alpha - \beta)^2$$

$$\Leftrightarrow 22\alpha^2 - 15\alpha\beta + 2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\beta \\ \alpha = \frac{2}{11}\beta. \end{array}\right.$$

Với $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, chọn $\beta = 2$, $\alpha = 1$, ta được đường thẳng $AC : x + 2y + 5 = 0$. Trường hợp này bị loại vì khi đó đường thẳng AC song song với đường thẳng AB.

Với $\alpha = \frac{2}{11}\beta$, chọn $\beta = 11$, $\alpha = 2$, ta được đường thẳng $AC : 2x + 11y + 31 = 0$.

b) Hãy viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với mỗi đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2. Ta tìm được hai đường thẳng thoả mãn bài toán là: $3x + y - 5 = 0$ và $x - 3y - 5 = 0$.

37. a) Lấy $M(x_0 ; y_0)$ thuộc Δ_1, suy ra $ax_0 + by_0 + c = 0$. Kí hiệu $d(\Delta_1 ; \Delta_2)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ_2. Khi đó ta có :

$$d(\Delta_1 ; \Delta_2) = d(M ; \Delta_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Phương trình đường thẳng Δ_3 song song với Δ_1 và Δ_2 có dạng :

$$ax + by + e = 0 \ (e \neq c \ , e \neq d).$$

Áp dụng câu a) ta có :

$$d(\Delta_1 ; \Delta_3) = \frac{|c - e|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ ; \ d(\Delta_2 ; \Delta_3) = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Δ_3 cách đều hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 khi và chỉ khi

$$d(\Delta_1 ; \Delta_3) = d(\Delta_2 ; \Delta_3) \Leftrightarrow |c - e| = |d - e| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = d \ \text{(loại vì } \Delta_1 \neq \Delta_2) \\ e = \frac{c + d}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình của Δ_3 là $ax + by + \frac{c + d}{2} = 0$.

Áp dụng : Đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng đã cho có phương trình :

$$-3x + 4y + \frac{-10 + 1}{2} = 0 \text{ hay } -3x + 4y - \frac{9}{2} = 0.$$

38. (h. 101) *Cách 1*. Xem bài 23, chương II.

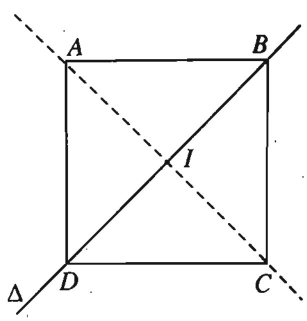
Cách 2. Nhận thấy $A \notin \Delta : 7x - y + 8 = 0$.

Vậy $B, D \in \Delta$.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\,;7)$. Phương trình đường chéo AC là :

$1(x + 4) + 7(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 7y - 31 = 0.$

Toạ độ giao điểm I của AC và BD là nghiệm của hệ phương trình :



Hình 101

$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$. Vậy $I = \left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\right)$. Suy ra toạ độ của C là $(3\,;\,4)$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên AC tạo với các đường thẳng AB và AD các góc 45°. Đường thẳng d qua $A(-4;\,5)$ có phương trình :

$$\alpha(x + 4) + \beta(y - 5) = 0 \text{ hay } \alpha x + \beta y + 4\alpha - 5\beta = 0\ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

d tạo với AC góc 45° khi và chỉ khi $\cos 45^\circ = \dfrac{|\alpha + 7\beta|}{\sqrt{50}.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\alpha + 7\beta|}{\sqrt{50}.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Leftrightarrow 12\alpha^2 - 7\alpha\beta - 12\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{4}{3}\beta \\ \alpha = -\dfrac{3}{4}\beta. \end{array}\right.$$

Với $\alpha = \dfrac{4}{3}\beta$, chọn $\beta = 3$, $\alpha = 4$, ta được đường thẳng d_1: $4x + 3y + 1 = 0$.

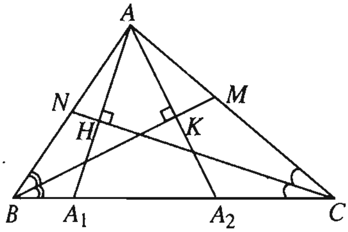
Với $\alpha = -\dfrac{3}{4}\beta$, chọn $\beta = -4$, $\alpha = 3$, ta được đường thẳng d_2: $3x - 4y + 32 = 0$.

Lấy phương trình AB là $4x + 3y + 1 = 0$ thì phương trình của AD là

$$3x - 4y + 32 = 0.$$

Do đó ta viết được phương trình của CD và BC lần lượt là : $4x + 3y - 24 = 0$ và $3x - 4y + 7 = 0$. (Lấy phương trình AD là $4x + 3y + 1 = 0$ thì phương trình của AB là $3x - 4y + 32 = 0$ và ta cũng có kết quả tương tự).

39. (h. 102) Kẻ $AH \perp CN$, $AK \perp BM$. Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là giao điểm của AH, AK với BC. Khi đó H là trung điểm của AA_1, K là trung điểm của AA_2. Ta tìm được toạ độ của A_1 và A_2. Từ đó viết được phương trình cạnh BC là $y + 1 = 0$.



Hình 102

40. a) Dễ thấy P, Q nằm về một phía đối với đường thẳng Δ. Gọi P' là điểm đối xứng với P qua Δ, khi đó :

$MP + MQ \geq P'Q$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi M, P', Q thẳng hàng. Ta tìm được $P' = (5 ; 4)$, phương trình $P'Q$ là $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 4 - t \end{cases}$. Từ đó tìm được $M = (0 ; -1)$.

b) Ta có $|NP - NQ| \leq PQ$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi N, P, Q thẳng hàng. Vậy N chính là giao điểm của đường thẳng PQ và Δ. Ta tìm được $N = (-9 ; -19)$.

41. a) Δ_m luôn đi qua điểm cố định $M(x_0 ; y_0)$ với mọi m khi và chỉ khi

$(m-2)x_0 + (m-1)y_0 + 2m - 1 = 0 \ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 + 2)m - 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \ \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 2 = 0 \\ -2x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

Vậy Δ_m luôn đi qua điểm cố định $M(1 ; -3)$ với mọi m.

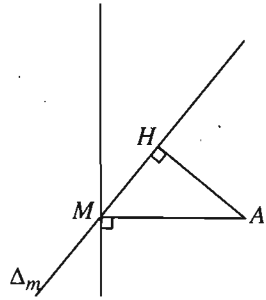
b) Đặt $f(x, y) = (m-2)x + (m-1)y + 2m - 1$.

Δ_m có ít nhất một điểm chung với đoạn $AB \Leftrightarrow f(x_A, y_A).f(x_B, y_B) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (7m - 8)(3m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{8}{7}.$$

c) (h. 103) Dựng $AH \perp \Delta_m$. Ta có $AH \leq AM$ với mọi m (M là điểm thuộc Δ_m với mọi m đã nói ở câu a)). Vậy AH lớn nhất bằng AM khi và chỉ khi H trùng với M hay $AM \perp \Delta_m$.

Ta có : $\overrightarrow{AM} = (-1; -6)$, Δ_m có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 - m ; m - 2)$.



Hình 103

$AM \perp \Delta_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1-m) - 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{5}$.

Vậy với $m = \frac{11}{5}$ thì khoảng cách từ A đến Δ_m là lớn nhất.

§4. Đường tròn

42. a) $I(-4 ; 2), R = \sqrt{7}$;

b) $I(5 ; -7), R = \sqrt{15}$;

c) $I(3 ; 2), R = 7$;

d) $I(5 ; 5), R = \sqrt{105}$;

e) $I(-4 ; 3), R = \sqrt{17}$;

f) $I(-2 ; -5), R = \sqrt{14}$.

43. a) *Cách 1*. Đường tròn đường kính AB nhận trung điểm I của AB là tâm và có bán kính $R = \frac{1}{2}AB$.

Ta có : $I = (4 ; 2), R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-7)^2 + (7+3)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{34} = \sqrt{34}$.

Phương trình đường tròn là

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 34 \text{ hay } x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0.$$

Cách 2. Điểm $M(x ; y)$ thuộc đường tròn đường kính $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x-1) + (y+3)(y-7) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0$.

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0$.

44. Gọi $I(x ; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có :

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 51 \\ 12x - 6y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Bán kính đường tròn : $R = IA = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

45. Toạ độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+4y-6=0\\4x+3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases} \Rightarrow A=(-2\,;\,3).$

Tương tự, ta tính được $B(2\,;\,0)$, $C\left(\frac{1}{4}\,;0\right)$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{4x+3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x-y+5=0 & (1)\\ x+y-1=0 & (2).\end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B, C vào vế trái của (1), ta được : $2+5=7>0$; $\frac{1}{4}+5>0.$

Vậy (2) là phương trình đường phân giác trong của góc A.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc B là

$$\frac{3x+4y-6}{5} = \pm y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}3x-y-6=0 & (3)\\ x+3y-2=0 & (4).\end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của A, C vào vế trái của (4), ta được : $-2+3.3-2=5>0$; $\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}<0.$ Vậy (4) là phương trình đường phân giác trong của góc B.

Gọi $I(x\,;\,y)$ và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-1=0\\x+3y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow I=\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right).$

$r=d(I\,;\,BC)=\frac{1}{2}$. Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

46.
- $0<m<\frac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ không có điểm chung với $(\mathscr{C})$.
- $m<0$ hoặc $m>\frac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ cắt $(\mathscr{C})$.
- $m=0$ hoặc $m=\frac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.

47. a) Xét điểm $M(x ; y)$. Biến đổi điều kiện $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ qua toạ độ ta được phương trình đường tròn cần tìm $(\mathscr{C}) : \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{107}{4}$.

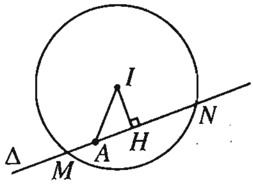
$(\mathscr{C})$ có tâm $I\left(-\frac{9}{2} ; 1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{107}}{2}$.

b) (h. 104) $IA < R$ nên A nằm trong $(\mathscr{C})$. Gọi H là trung điểm của MN thì $IH \perp MN$.

$MN = 2MH = 2\sqrt{R^2 - IH^2}$.

Do đó MN min $\Leftrightarrow IH$ max.

Ta luôn có $IH \le IA$. Vậy IH max $\Leftrightarrow H \equiv A$, tức



Hình 104

là $\overrightarrow{IA} = \left(\frac{7}{2} ; -1\right)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ cần tìm. Từ đó suy ra phương trình của Δ là $7x - 2y + 7 = 0$.

48. Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$, tâm $I(a ; b)$, bán kính R có dạng

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox, Oy khi và chỉ khi $|a| = |b| = R$. Phương trình của $(\mathscr{C})$ trở thành

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2.$$

a) $A(2 ; -1) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow (2-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$. (1)

• Với $a = b$ thì (1) $\Leftrightarrow (2-a)^2 + (1+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$, phương trình vô nghiệm.

• Với $a = -b$ thì (1) $\Leftrightarrow (2-a)^2 + (a-1)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = 5.$$

– Khi $a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1$, ta được đường tròn $(\mathscr{C}_1) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

– Khi $a = 5 \Rightarrow b = -5, R = 5$ ta được đường tròn $(\mathscr{C}_2) : (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

b) I thuộc đường thẳng $3x - 5y - 8 = 0$ nên $3a - 5b - 8 = 0$. (2)

• Với $a = b$ thì (2) $\Leftrightarrow 3a - 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = -4, R = 4$.

Ta được đường tròn $(\mathscr{C}_1) : (x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$.

• Với $a = -b$ thì (2) $\Leftrightarrow 3a - 5.(-a) - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1$.

Ta được đường tròn $(\mathscr{C}_2) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

49. Đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính R có phương trình :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox tại $A(6\ ;\ 0)$ nên $a = 6$, $|b| = R$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-b)^2 = b^2.$$

$B(9\ ;\ 9) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow (9-6)^2 + (9-b)^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 5 \Rightarrow R = 5$.

Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$.

50. Gọi $I(a\ ;\ b)$ và R là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ cần tìm. Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với $\Delta : x - y - 1 = 0$ khi và chỉ khi $d(I\ ;\ \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} = R$.

$$A, B \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-a)^2 + b^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (1) \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = 1 - b$.

Thay $a = 1 - b$ vào (2), ta có :

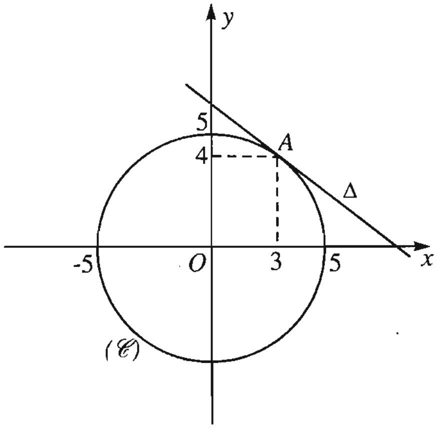
$$b^2 + (b-2)^2 = 2b^2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 0, R = \sqrt{2}.$$

Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $x^2 + (y-1)^2 = 2$.

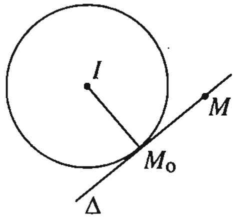
51. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0\ ;\ 0)$, bán kính $R = 5$. Tiếp tuyến Δ đi qua A, nhận $\overrightarrow{OA}(3\,;4)$ làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình :

$$3(x-3) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0.$$

Đường tròn ($\mathscr{C}$) và tiếp tuyến Δ được vẽ như hình 105. Các câu b), c), d), e), f) : học sinh tự làm.



Hình 105



Hình 106

52. (h. 106) ($\mathscr{C}$) có tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính R. Khi đó :

$$M(x\ ;\ y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a + a - x_0) + (y_0 - b)(y - b + b - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - [(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

53. ($\mathscr{C}$) có tâm $I(1\ ;\ -3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2 - 5} = \sqrt{5}$.

$\Delta \,//\, d \Rightarrow \Delta$ có phương trình : $2x + y + m = 0$ $(m \neq -1)$. Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) ⇔

$$d(I\,;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 3 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4. \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến cần tìm là $\Delta_1 : 2x + y + 6 = 0$ và $\Delta_2 : 2x + y - 4 = 0$.

Toạ độ tiếp điểm M của Δ_1 với ($\mathscr{C}$) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4. \end{cases}$$ Vậy $M = (-1\ ;\ -4)$.

Toạ độ tiếp điểm N của Δ_2 với ($\mathscr{C}$) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$ Vậy $N = (3\ ;\ -2)$.

Chú ý. Khi biết toạ độ của M, thì do M và N đối xứng nhau qua I, ta có thể tính ngay được toạ độ của $N = (2x_I - x_M \,;\, 2y_I - y_M)$.

54. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3 \,;\, -1)$, bán kính $R = 2$.

$$IA = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5} > R, \text{ suy ra } A \text{ nằm ngoài } (\mathscr{C}).$$

b) A nằm ngoài $(\mathscr{C})$ nên từ A ta kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

Cách 1. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình :

$$\alpha(x-1) + \beta(y-3) = 0 \text{ hay } \alpha x + \beta y - \alpha - 3\beta = 0 \ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I \,;\, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3\alpha - \beta - \alpha - 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2$

$$\Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \beta(3\beta - 4\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta = \dfrac{4}{3}\alpha. \end{array}\right.$$

• Với $\beta = 0$, chọn $\alpha = 1$, ta được tiếp tuyến thứ nhất : $x - 1 = 0$.

• Với $\beta = \dfrac{4}{3}\alpha$, chọn $\alpha = 3, \beta = 4$, ta được tiếp tuyến thứ hai : $3x + 4y - 15 = 0$.

Cách 2. • Xét đường thẳng Δ đi qua A và có hệ số góc k. Phương trình của Δ là :

$$y = k(x-1) + 3 \text{ hay } kx - y + 3 - k = 0.$$

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I \,;\, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3k + 1 + 3 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$

$$\Leftrightarrow |k + 2| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow k^2 + 4k + 4 = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}.$$

Ta được tiếp tuyến thứ nhất $\Delta_1 : y = -\dfrac{3}{4}(x - 1) + 3$ hay $3x + 4y - 15 = 0$.

• Xét đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với Ox. Khi đó, Δ có phương trình $x = 1$ hay $x - 1 = 0$.

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I \,;\, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3 - 1|}{\sqrt{1}} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$. Đẳng thức cuối đúng nên Δ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$. Ta có tiếp tuyến thứ hai $\Delta_2 : x - 1 = 0$.

Chú ý. Trong cách giải 2, nếu chỉ xét trường hợp tiếp tuyến Δ có hệ số góc thì bài toán sẽ mất nghiệm.

c) Học sinh tự làm.

55. a) $\Delta : 4x + 3y - 11 = 0$.

b) Có hai tiếp tuyến là $\Delta_1 : 4x + 3y + 39 = 0$ và $\Delta_2 : 4x + 3y - 11 = 0$.

c) Có hai tiếp tuyến : $\Delta_1 : y = \dfrac{-32 + 5\sqrt{55}}{9}(x - 2) + 6$,

$$\Delta_2 : y = \frac{-32 - 5\sqrt{55}}{9}(x - 2) + 6.$$

56. a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(2 ; 4)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2^2 + 4^2 - 11} = 3$.

$(\mathscr{C}_2)$ có tâm $I_2(1 ; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2} = 2$.

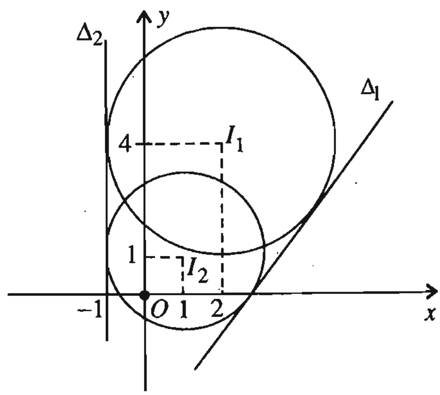
$$1 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10} < R_1 + R_2 = 5.$$

Suy ra $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau.

b) (h. 107) Theo câu a), $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau nên chúng có hai tiếp tuyến chung. Tiếp tuyến chung Δ có phương trình : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 > 0)$.

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} d(I_1 ; \Delta) = R_1 \\ d(I_2 ; \Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2\alpha + 4\beta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 3 & (1) \\ \dfrac{|\alpha + \beta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 & (2) \end{cases}$$



Hình 107

$\Rightarrow 2|2\alpha + 4\beta + \gamma| = 3|\alpha + \beta + \gamma|$

$\Leftrightarrow 4\alpha + 8\beta + 2\gamma = \pm\,(3\alpha + 3\beta + 3\gamma)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \gamma = \alpha + 5\beta \\ \gamma = -\dfrac{7\alpha + 11\beta}{5}. \end{array}\right.$$

– Thay $\gamma = \alpha + 5\beta$ vào (2) ta có :

$$\frac{|2\alpha + 6\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$\Leftrightarrow 2\beta(4\beta + 3\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ hoặc $4\beta = -3\alpha$.

Với $\beta = 0$ (do đó $\alpha \neq 0$), suy ra $\gamma = \alpha$. Ta có tiếp tuyến chung thứ nhất

$$\Delta_1 : \ \alpha x + \alpha = 0 \text{ hay } x + 1 = 0.$$

Với $4\beta = -3\alpha$, chọn $\alpha = 4$, $\beta = -3$, ta được $\gamma = -11$. Ta có tiếp tuyến chung thứ hai $\Delta_2 :\ 4x - 3y - 11 = 0$.

– Thay $\gamma = -\dfrac{7\alpha + 11\beta}{5}$ vào (2) ta có :

$$\frac{|2\alpha + 6\beta|}{5\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)^2 = 25(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow 12\alpha^2 - 3\alpha\beta + 8\beta^2 = 0,$$

phương trình vô nghiệm.

Vậy $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có hai tiếp tuyến chung là $\Delta_1 : x + 1 = 0$ và $\Delta_2 :\ 4x - 3y - 11 = 0$.

57. Đặt $M = (x\ ;\ y)$, ta có $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + \ldots + k_nMA_n^2 = k$

$\Leftrightarrow\ [k_1(x - x_1)^2 + k_2(x - x_2)^2 + \ldots + k_n(x - x_n)^2]\ + [k_1(y - y_1)^2 + k_2(y - y_2)^2 + \ldots + k_n(y - y_n)^2] = k$

$\Leftrightarrow (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x^2 + y^2) - 2(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)x$

$- 2(k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n)y + k_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + k_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + \ldots +$

$+ k_n(x_n^2 + y_n^2) = k.$ (1)

Đặt $a = \dfrac{k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$, $b = \dfrac{k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$,

$$c = \frac{k_1(x_1^2 + y_1^2) + k_2(x_2^2 + y_2^2) + \ldots + k_n(x_n^2 + y_n^2) - k}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}.$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$

– Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì tập hợp các điểm M là điểm $I(a\ ;\ b)$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

Chú ý rằng : câu a) của bài 47 chương III là một trường hợp đặc biệt của bài này.

58. a) Phương trình $(\mathscr{C}_m)$ có dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

với $a = \dfrac{m+2}{2}$, $b = -\dfrac{m+4}{2}$, $c = m + 1$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = \left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m+4}{2}\right)^2 - (m+1) = \dfrac{m^2 + 4m + 8}{2} > 0$

với mọi m. Vậy $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Toạ độ tâm I_m của đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là $\begin{cases} x = -\dfrac{m+2}{2} \\ y = \dfrac{m+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -(m+2) & (1) \\ 2y = m+4 & (2) \end{cases}$

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được $2x + 2y = 2$ hay $x + y - 1 = 0$.

Vậy tập hợp tâm của các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là đường thẳng có phương trình :

$$x + y - 1 = 0.$$

c) Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định mà họ $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua. Khi đó ta có :

$x_0^2 + y_0^2 + (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0 \ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 + 1)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 & (1) \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x_0 = y_0 - 1$, thay vào (2), ta được :

$(y_0 - 1)^2 + y_0^2 + 2(y_0 - 1) - 4y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y_0^2 - 4y_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = 2. \end{array}\right.$

Với $y_0 = 0$ thì $x_0 = -1$. Ta được điểm $M_1(-1 ; 0)$.

Với $y_0 = 2$ thì $x_0 = 1$. Ta được điểm $M_2(1 ; 2)$.

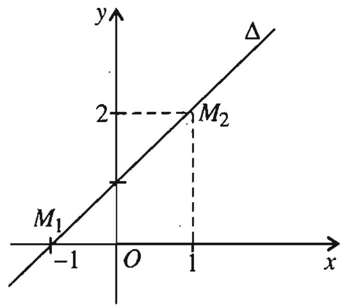
Vậy họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định là $M_1(-1 ; 0)$ và $M_2(1 ; 2)$.

d) (h. 108) $(\mathscr{C}_m)$ không đi qua điểm $(x_1 ; y_1)$ với mọi m khi và chỉ khi phương trình (ẩn m) : $(x_1 - y_1 + 1)m + x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 - 4y_1 + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 - 4y_1 + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ x_1 \neq \pm 1. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ mà họ $(\mathscr{C}_m)$ không bao giờ đi qua với mọi giá trị của m là đường thẳng Δ có phương trình $y = x + 1$, bỏ đi hai điểm $M_1(-1 ; 0)$ và $M_2(1 ; 2)$.



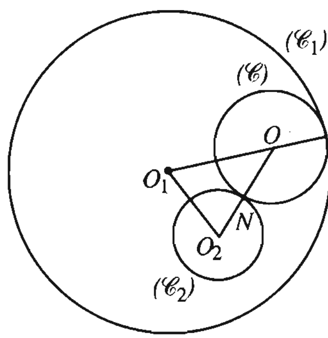
Hình 108

§5. Đường elip

59. (h. 109) Xét đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O, tiếp xúc trong với $(\mathscr{C}_1)$ tại M, tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C}_2)$ tại N. Ta có :

$$OO_1 + OO_2 = O_1M - OM + O_2N + ON$$
$$= R_1 + R_2 \text{ không đổi.}$$

Tập hợp các tâm O là elip có các tiêu điểm là O_1, O_2 và độ dài trục lớn $2a = R_1 + R_2$.



Hình 109

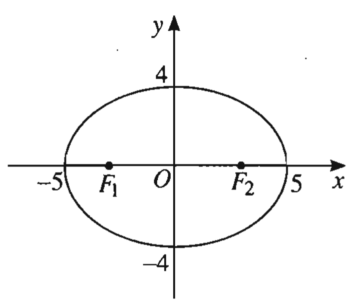
60. a) O là tâm đối xứng, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$;

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. Độ dài trục lớn : $2a = 10$, độ dài trục bé : $2b = 8$. Tiêu cự : $2c = 6$.

Các tiêu điểm : $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$. Các đỉnh : $(\pm 5 ; 0)$, $(0 ; \pm 4)$.

Elip được vẽ như hình 110.



Hình 110

b) Viết lại phương trình của elip : $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. Elip có tâm đối xứng O.

$a^2=1\Rightarrow a=1$, $b^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$, $c^2=a^2-b^2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Độ dài trục lớn : $2a=2$, độ dài trục nhỏ : $2b=1$, tiêu cự : $2c=\sqrt{3}$.

Các tiêu điểm : $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$. Các đỉnh : $(\pm 1\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ \pm\dfrac{1}{2})$.

Các câu c), d), e), f) : học sinh tự làm.

61. Elip (E) có phương trình chính tắc : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$.

a) $A(0\ ;\ -2)$ là một đỉnh $\Rightarrow b=2$; $F(1\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c=1$.

$a^2=b^2+c^2=5$. Phương trình của (E) là : $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

b) $F_1(-7\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow$ tiêu điểm thứ hai là : $F_2(7\ ;\ 0)$.

$M\in(E)\Rightarrow 2a=MF_1+MF_2=\sqrt{(-7+2)^2+12^2}+\sqrt{(7+2)^2+12^2}=28$
$\Rightarrow a=14$.

$F(-7\ ;\ 0)$ là tiêu điểm $\Rightarrow c=7\Rightarrow b^2=a^2-c^2=196-49=147$.

Phương trình của (E) là : $\dfrac{x^2}{196}+\dfrac{y^2}{147}=1$.

c) $2c=6\Rightarrow c=3$; $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow a=5$, $b^2=a^2-c^2=16$.

Phương trình của (E) là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

d) $a=4$, $b=3\Rightarrow$ phương trình của (E) là $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

e) $M, N\in(E)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\[2mm]\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\\ b^2=15.\end{cases}$

Phương trình của (E) là $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

62. a) $m = a + c, n = a - c \Rightarrow \dfrac{m-n}{m+n} = \dfrac{(a+c)-(a-c)}{a+c+a-c} = \dfrac{2c}{2a} = e.$

b) $2a = 768806 \Rightarrow a = 384403$; $2b = 767746 \Rightarrow b = 383873$;

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 20179.$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ tâm Trái Đất tới tâm Mặt Trăng là :

$a + c \approx 404582$ (km) và khoảng cách bé nhất là : $a - c \approx 364224$ (km).

63. $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$; $c^2 = a^2 - b^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}.$

Elip (E) có các tiêu điểm : $F_1(-2\sqrt{2}\,;0), F_2(2\sqrt{2}\,;0).$

a) Gọi $M(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó :

$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3e} = \dfrac{a^2}{3c} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}.$

$M \in (E) \Rightarrow y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{9} = 1 - \dfrac{9}{9.8} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$

Có hai điểm cần tìm là $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\,;\,\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right).$

b) Gọi $N(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó : $\overrightarrow{F_1N} = \left(x + 2\sqrt{2}\,;\,y\right),$ $\overrightarrow{F_2N} = (x - 2\sqrt{2}\,;\,y).$

$\overrightarrow{F_1N} \perp \overrightarrow{F_2N} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1N}.\overrightarrow{F_2N} = 0 \Leftrightarrow \left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right) + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8 + y^2 = 0.$ (1)

$N \in (E) \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1.$ (2)

Giải (1) và (2) ta được $x^2 = \dfrac{63}{8}$ và $y^2 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ và $y = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

Có bốn điểm cần tìm là $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\,;\,\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$

c) Gọi $P(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Ta có :

$F_1F_2^2 = F_1P^2 + F_2P^2 - 2F_1P.F_2P.\cos 60^\circ = (F_1P + F_2P)^2 - 2F_1P.F_2P - 2F_1P.F_2P.\dfrac{1}{2}$

$= 4a^2 - 3F_1P.F_2P = 4a^2 - 3(a + ex)(a - ex) = 4a^2 - 3(a^2 - e^2x^2) = a^2 + 3e^2x^2.$

Như vậy $4c^2 = a^2 + 3.\frac{c^2}{a^2}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(4c^2 - a^2).a^2}{3c^2} = \frac{(4.8-9).9}{3.8} = \frac{69}{8}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}.$$

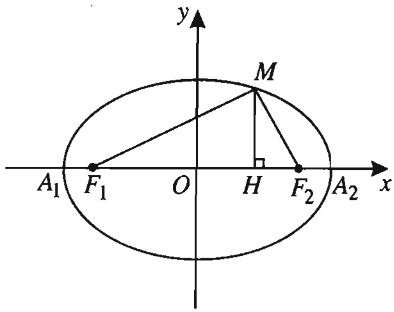
$P \in (E) \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}.$

Có bốn điểm cần tìm với toạ độ là $\left(\pm\frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}} ; \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}\right).$

64. (h. 111)

$M(x ; y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$MF_1 = a + ex, MF_2 = a - ex.$



Hình 111

a) $MF_1.MF_2 + OM^2 =$

$$= (a + ex)(a - ex) + x^2 + y^2$$
$$= a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2$$
$$= a^2 + y^2 + x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$$
$$= a^2 + y^2 + b^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} = a^2 + y^2 + b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$$

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4e^2x^2.$ (1)

$$4(OM^2 - b^2) = 4(x^2 + y^2 - b^2) = 4.\left[x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) - b^2\right]$$
$$= 4x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 4e^2x^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2).$

c) $HM^2 = y^2.$

$$-\frac{b^2}{a^2}\overline{HA_1}.\overline{HA_2} = -\frac{b^2}{a^2}(-a - x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$
$$= b^2 - (b^2 - y^2) = y^2 \Rightarrow HM^2 = -\frac{b^2}{a^2}\overline{HA_1}.\overline{HA_2}.$$

65. a) $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$,

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$,

$c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

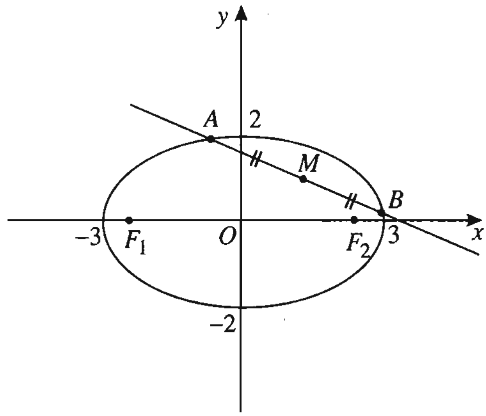
Các tiêu điểm :

$F_1(-\sqrt{5}\,;0), F_2(\sqrt{5}\,;0)$.

Các đỉnh : $(\pm 3\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ \pm 2)$.

Tâm sai : $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Elip được vẽ như hình 112.



Hình 112

b) Hoành độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(x+m)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 13x^2 + 18mx + 9m^2 - 36 = 0. \ (1)$$

d và (E) có điểm chung khi và chỉ khi (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 81m^2 - 13(9m^2 - 36) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 13 \Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$.

Vậy với $-\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$ thì d và (E) có điểm chung.

c) (h. 112) Đường thẳng Δ đi qua M, với vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;b)$ có dạng :

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

$$A, B \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} x_A = 1 + at_1 \\ y_A = 1 + bt_1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_B = 1 + at_2 \\ y_B = 1 + bt_2. \end{cases}$$

M là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1 + t_2) = 0 \\ b(t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (1) \qquad (\text{do } a^2 + b^2 \neq 0).$$

$A, B \in (E)$ suy ra t_1, t_2 là nghiệm của phương trình :

$4(at+1)^2 + 9(bt+1)^2 = 36 \Leftrightarrow (4a^2 + 9b^2)t^2 + (8a + 18b)t - 23 = 0.$

$t_1 + t_2 = 0 \Rightarrow 8a + 18b = 0 \Leftrightarrow 4a + 9b = 0.$

Chọn $a = 9$, $b = -4$, ta được phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \text{ hay } 4x + 9y - 13 = 0.$$

Chú ý. Có thể giải bài toán này bằng cách viết phương trình của Δ dưới dạng $y = k(x-1) + 1$ hoặc $x = 1$, nhưng việc tính toán sẽ phức tạp hơn.

66. a) $M(x_0 ; y_0) \in E \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$; $OM^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Ta có : $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{a^2} \le \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \le a^2 \Leftrightarrow OM^2 \le a^2 \Leftrightarrow OM \le a$.

$\dfrac{x_0^2}{b^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} \ge \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \ge b^2 \Leftrightarrow OM^2 \ge b^2 \Leftrightarrow OM \ge b$.

Vậy $b \le OM \le a$. Ta có $a = OM$ khi và chỉ khi $y_0 = 0$, tức là M trùng với các đỉnh trên trục lớn.

Ta có $b = OM$ khi và chỉ khi $x_0 = 0$, tức là M trùng với các đỉnh trên trục bé.

b) Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_A^2 = \frac{a^2b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \quad y_A^2 = \frac{a^2b^2\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}.$$

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{a^2b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} + \frac{a^2b^2\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} = \frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}.$$

$$\Rightarrow OA = \frac{ab.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}.$$

c) Do OA vuông góc với OB nên phương trình đường thẳng OB là : $\beta x - \alpha y = 0$. B là giao điểm của (E) với đường thẳng $\beta x + (-\alpha)y = 0$ nên áp dụng câu b), ta có

$$OB^2 = \frac{a^2b^2\left[\beta^2 + (-\alpha)^2\right]}{a^2\beta^2 + b^2(-\alpha)^2} = \frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

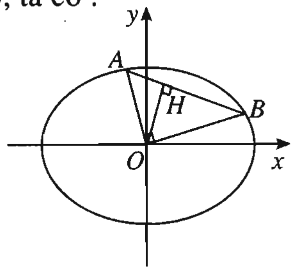
Do đó : $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ không đổi.

d) (h. 113) Kẻ $OH \perp AB$. Trong tam giác vuông AOB, ta có :

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vậy đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O, bán kính $R=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Hình 113

67. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có : trục Ox đi qua A, B ; trục Oy là đường trung trực của AB. Đặt $AB = 2a$, $AD = 2b$. Hãy tìm toạ độ của I_k và chứng minh I_k nằm trên elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

68. a) $\overrightarrow{HM}'=k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}-x_H=k(x_M-x_H) \\ y_{M'}-y_H=k(y_M-y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=x_M \\ y_{M'}=ky_M. \end{cases}$

(Chú ý rằng trong trường hợp này thì $x_H = x_M = x_{M'}$, $y_H = 0$).

b) Tương tự câu a) với chú ý rằng trong phép co về trục Oy thì $x_H = 0$, $y_H = y_M = y_{M'}$.

69. • $M(x\,;\,y) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow x^2+y^2=a^2$. Ảnh M' của M qua phép co về trục Ox theo hệ số $\dfrac{b}{a}<1$ là $\begin{cases} x_{M'}=x \\ y_{M'}=\dfrac{b}{a}y \end{cases} \Rightarrow a^2=x^2+y^2=x_{M'}^2+\dfrac{a^2}{b^2}y_{M'}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{M'}^2}{a^2}+\frac{y_{M'}^2}{b^2}=1.$$

Vậy ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép co về trục Ox theo hệ số $\dfrac{b}{a}<1$ là elip (E) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

• Phần ngược lại chứng minh tương tự.

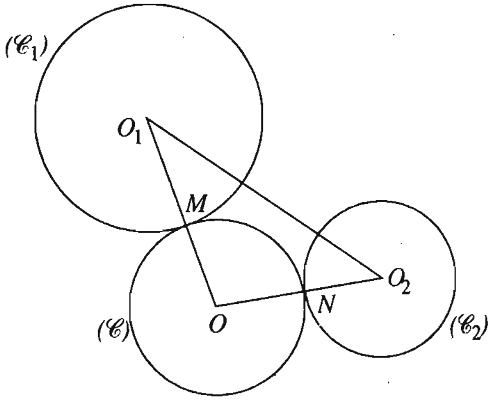
70. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{36}+y^2=1$; c) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

71. a) $x^2+y^2=25$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{18}=1$; c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$.

§6. Đường hypebol

72. (h. 114) Kí hiệu O_1, R_1 là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C}_1)$; O_2, R_2 là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C}_2)$.

Xét đường tròn thay đổi $(\mathscr{C})$, tâm O, bán kính R. $(\mathscr{C})$ tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C}_1)$ tại M, với $(\mathscr{C}_2)$ tại N. Ta có :



Hình 114

$$|OO_1-OO_2|=|(OM+O_1M)-(ON+O_2N)|$$
$$=|O_1M-O_2N|=|R_1-R_2|>0 \text{ (do } R_1\neq R_2).$$

Do đó O nằm trên một hypebol có các tiêu điểm là O_1 và O_2. Tâm đối xứng của hypebol này là trung điểm của O_1O_2. Lập luận tương tự cho trường hợp đường tròn $(\mathscr{C})$ cùng tiếp xúc trong với các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

73. a) $a^2=16 \Rightarrow a=4$; $b^2=4 \Rightarrow b=2$; $c^2=a^2+b^2=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5}$.

Độ dài trục thực : $2a=8$.

Độ dài trục ảo : $2b=4$.

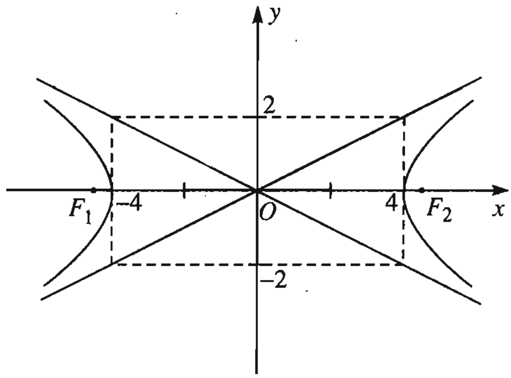
Tiêu cự : $2c=4\sqrt{5}$; tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Các tiêu điểm : $F_1 = (-2\sqrt{5}\ ;\ 0)$, $F_2 = (2\sqrt{5}\ ;0)$.

Các đỉnh : $A_1 = (-4\ ;\ 0), A_2 = (4\ ;\ 0)$.

Các tiệm cận : $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x$.

Hypebol được vẽ như hình 115.



Hình 115

f) Viết lại phương trình hypebol :

$$\frac{x^2}{\frac{1}{m}} - \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$a^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{m}}\ ;\ b^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{m+n}{mn}}.$$

Độ dài trục thực : $2a = \frac{2}{\sqrt{m}}$, độ dài trục ảo : $2b = \frac{2}{\sqrt{n}}$. Tiêu cự : $2c = 2\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$.

Các tiêu điểm : $F_1 = \left(-\sqrt{\frac{m+n}{mn}}\ ;0\right)$; $F_2 = \left(\sqrt{\frac{m+n}{mn}}\ ;\ 0\right)$.

Các đỉnh : $A_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{m}}\ ;0\right)$, $A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\ ;0\right)$. Các tiệm cận : $y = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}\,.x$.

Các câu b), c), d), e) học sinh tự làm.

74. Hypebol (H) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$.

a) $(5\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 5$; $(-4\ ;\ 0)$ là một đỉnh $\Rightarrow a = 4$.

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b) $2b = 12 \Rightarrow b = 6$; $e = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{25}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+36}{a^2} = \frac{25}{16} \Rightarrow a^2 = 64$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

c) $a = 2$; $e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow c = 3$. Do đó $b^2 = c^2 - a^2 = 5$.

Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

d) $e=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{2} \Leftrightarrow c^2=2a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2a^2 \Leftrightarrow a^2=b^2$ (1)

$A\in(H) \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a^2=b^2=16$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

e) $P\in(H), Q\in(H) \Rightarrow \begin{cases}\frac{36}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{64}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=32\\ b^2=8.\end{cases}$

Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.

75. (H) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

a) $a=\frac{1}{2}, b=1 \Rightarrow$ phương trình của (H) : $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{1}=1$.

b) $(3 ; 0)$ là một đỉnh của $(H) \Rightarrow a=3$. Các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở với trục Ox là các tiêu điểm của (H). Vậy $c=4$; $b^2=c^2-a^2=7$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

c) $c=10$. Các tiệm cận có phương trình $y=\pm\frac{4}{3}x$, nên $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, suy ra $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{4^2+3^2}{3^2}$ hay $\frac{10^2}{a^2}=\frac{25}{9}$. Vậy $a^2=36$, $b^2=64$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

d) Phương trình các đường tiệm cận là $y=\pm\frac{b}{a}x$. Do góc giữa hai đường tiệm cận là 60° và hai đường tiệm cận đối xứng với nhau qua Ox, nên có hai trường hợp :

– Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 30°, suy ra $\frac{b}{a}=\tan 30^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

– Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 60^o, suy ra $\frac{b}{a} = \tan 60^o = \sqrt{3}$. (2)

$$N \in (H) \Rightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $a^2 = 9, b^2 = 3$. Ta được hypebol $(H_1) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Từ (2) và (3) suy ra $a^2 = 33, b^2 = 99$. Ta được hypebol $(H_2) : \frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1$.

76. Xét điểm tuỳ ý $M(x ; y) \in (H)$. Ta có : $M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2m$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2}\right| = 2m$$

$$\Leftrightarrow (x+m)^2 + (y+m)^2 + (x-m)^2 + (y-m)^2$$
$$-2\sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2}.\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 =$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 + (2mx + 2my)}.\sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 - (2mx + 2my)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 + 2m^2\right)^2 - (2mx + 2my)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{m^2}{2}.$$

Chú ý rằng : Với $m = \sqrt{2}$ ta có hypebol $y = \frac{1}{x}$.

77. (H) có hai tiệm cận là $\Delta_1 : \ y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$;

$$\Delta_2 : \ y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0.$$

Xét $M(x ; y) \in (H)$ thì $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, hay $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Khi đó

$$d(M ; \Delta_1).d(M ; \Delta_2) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

78. a) Xét $M(x ; y)$. Ta có :

$$MB = 2MH \Leftrightarrow MB^2 = 4MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1. \quad (1)$$

Tập hợp các điểm M cần tìm là hypebol có phương trình (1).

b) Xét $N(x ; y)$ thì $\overrightarrow{AN} = (x + 1 ; y)$, $\overrightarrow{BN} = (x - 1; y)$. Rõ ràng $x \neq -1$ và $x \neq 1$ (vì nếu không thì các đường thẳng AN hoặc BN không có hệ số góc), do đó các đường thẳng AN và BN lần lượt có hệ số góc $k_1 = \frac{y}{x+1}$, $k_2 = \frac{y}{x-1}$. Khi đó : $k_1.k_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{y}{x+1}.\frac{y}{x-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2-1} = 2 \Leftrightarrow$ $y^2 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$ (2). Tập hợp các điểm N cần tìm là hypebol có phương trình (2) bỏ đi hai đỉnh : $(-1 ; 0)$ và $(1; 0)$.

79. Viết lại phương trình của (H) : $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$; $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.

(H) có các tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$.

a) Gọi $M(x ; y)$ là điểm cần tìm. Ta có :

$$\overrightarrow{F_1M} = \left(x + \sqrt{5} ; y\right),\ \overrightarrow{F_2M} = \left(x - \sqrt{5} ; y\right).$$

$F_1M \perp F_2M \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$ (1)

$M \in (H) \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 - 4 = 0$ (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được : $x = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là : $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}} ; \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Gọi $N(x ; y)$ là điểm cần tìm. $N \in (H) \Rightarrow |NF_1 - NF_2| = 2a = 2$.

Trong tam giác F_1NF_2, ta có :

$$F_1F_2^2 = F_1N^2 + F_2N^2 - 2.F_1N.F_2N.\cos\widehat{F_1NF_2}$$

$$= (F_1N - F_2N)^2 + 2F_1N.F_2N - 2F_1N.F_2N.\cos 120^\circ$$

$$= 4 + 3\,F_1N.F_2N = 4 + 3.|a + ex|.|a - ex| = 4 + 3|a^2 - e^2x^2|$$

$\Rightarrow 4c^2 = 4 + 3\left|1 - 5x^2\right| \Leftrightarrow 4.5 = 4 + 3\left|1 - 5x^2\right| \Leftrightarrow \left|1 - 5x^2\right| = \dfrac{16}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{19}{15} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}$. Thay $x = \pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}$ vào phương trình của (H), ta tính được $y = \pm\dfrac{4}{\sqrt{15}}$. Vậy có bốn điểm cần tìm là : $\left(\pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}\ ;\ \pm\dfrac{4}{\sqrt{15}}\right)$.

c) Do (H) nhận Ox, Oy là các trục đối xứng, nên ta chỉ cần xét những điểm $(x\ ;\ y)$ của (H) mà : x, y nguyên, $x \geq 0$, $y \geq 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục Ox và Oy.

Ta có : $4x^2 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 4$ (1).

Do $2x - y$, $2x + y$ nguyên, $2x + y \geq 0$ và $2x + y \geq 2x - y$, nên từ (1) ta có các trường hợp :

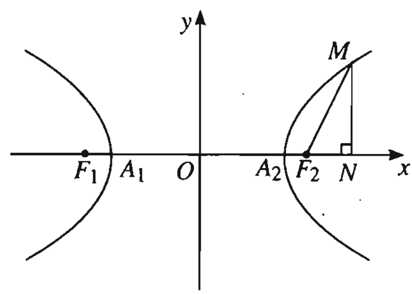
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad (2), \qquad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad (3)$$

Hệ (2) không có nghiệm nguyên, hệ (3) có một nghiệm nguyên là : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy những điểm trên (H) có toạ độ nguyên là : $(1\ ;\ 0)$, $(-1\ ;\ 0)$.

80. (h. 116) $M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$, $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$.



Hình 116

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 =$

$$= x^2 + y^2 - \left|a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right|$$

$$= x^2 + y^2 - \left|a^2 - c^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)\right| = x^2 + y^2 - \left|-b^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2\right|$$

$$= x^2 + y^2 - b^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + y^2 - b^2 - \frac{a^2 + b^2}{b^2}y^2$$

$$= a^2 - b^2.$$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + 4MF_1.MF_2 = 4a^2 + 4\left|a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right|$

$$= 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2. \quad (1)$$

$$4(OM^2 + b^2) = 4(x^2 + y^2 + b^2) = 4x^2 + 4y^2 + 4b^2$$

$$= 4\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + 4y^2 + 4b^2$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + 4y^2\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) = 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) $NM^2 = y^2$.

$$\frac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2} = \frac{b^2}{a^2}(-x - a)(-x + a) = -\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = -b^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$= -b^2 + b^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = y^2.$$

Vậy $NM^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2}$.

81. a) $(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$.

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

(H) có hai nhánh : nhánh trái ứng với $x \leq -2$, nhánh phải ứng với $x \geq 2$.

Hoành độ giao điểm của (H) và Δ là nghiệm của phương trình :

$$5x^2 - 4.(x + m)^2 - 20 = 0, \text{ hay } x^2 - 8mx - 4(m^2 + 5) = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m. Do đó Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M và N thuộc hai nhánh khác nhau.

Theo giả thiết $x_M < x_N$ nên M thuộc nhánh trái, N thuộc nhánh phải.

b) (H) có các tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$.

$F_2N = \left|a - \frac{c}{a}x_N\right| = \left|2 - \frac{3}{2}x_N\right| = \frac{3}{2}x_N - 2$ (do $x_N \geq 2$).

$F_1M = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| = \left|2 + \frac{3}{2}x_M\right| = -\frac{3}{2}x_M - 2$ (do $x_M \le -2$).

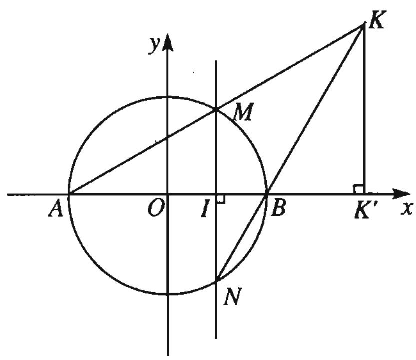
$F_2N = 2F_1M \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_N - 2 = 2\left(-\frac{3}{2}x_M - 2\right) \Leftrightarrow 3x_N + 6x_M + 4 = 0$ (2)

x_M, x_N là nghiệm của (1) nên : $\begin{cases} x_M + x_N = 8m & (3) \\ x_M.x_N = -4(m^2 + 5) & (4). \end{cases}$

Giải (2) và (3) ta được : $x_M = -\frac{4}{3} - 8m$, $x_N = \frac{4}{3} + 16m$. Thay x_M, x_N vào (4) ta có : $\left(-\frac{4}{3} - 8m\right)\left(\frac{4}{3} + 16m\right) = -4(m^2 + 5) \Leftrightarrow 279m^2 + 72m - 41 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{1415}}{93}$. Vậy với $m = \frac{-12 \pm \sqrt{1415}}{93}$ thì $F_2N = 2F_1M$.

82. (h. 117) Giả sử $M = (x_0 ; y_0)$, suy ra $N = (x_0 ; -y_0)$. Do $-1 < m < 1, m \neq 0$ nên $-1 < x_0, y_0 < 1, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. Ta có :



Hình 117

Phương trình đường thẳng AM :

$$\frac{x+1}{x_0+1} = \frac{y}{y_0} \quad (1).$$

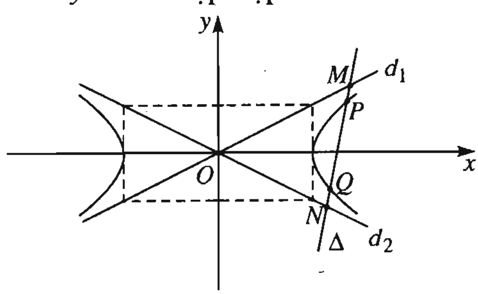
Phương trình đường thẳng BN :

$$\frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y}{-y_0} \quad (2).$$

Toạ độ $(x ; y)$ của K thoả mãn (1) và (2). Nhân từng vế của (1) và (2) với nhau, ta được : $\frac{x^2-1}{x_0^2-1} = \frac{y^2}{-y_0^2}$. Vì $M \in (\mathscr{C})$ nên $x_0^2 + y_0^2 = 1$, suy ra $x_0^2 - 1 = -y_0^2$. Do đó $x^2 - 1 = y^2$ hay $x^2 - y^2 = 1$. Tập hợp các điểm K là hypebol $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ bỏ đi hai đỉnh : $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

83. (h. 118)

a) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Hình 118

Phương trình chung của các đường tiệm cận d_1, d_2 là : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Gọi phương trình của Δ là :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Giả sử $\beta \neq 0$, khi đó, do vế trái của phương trình (H) và phương trình các đường tiệm cận giống nhau nên :

• Hoành độ các giao điểm P và Q của Δ và (H) là nghiệm của phương trình dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

• Hoành độ các giao điểm M và N của Δ và các tiệm cận là nghiệm của phương trình dạng :

$$ax^2 + bx + d = 0.$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của PQ và MN, thì ta có : $x_I = x_J = -\frac{b}{2a}$.

Suy ra I trùng với J. Vậy $MP = NQ$.

Nếu $\beta = 0$, thì Δ là đường thẳng vuông góc với Ox. Vì (H) và hai đường tiệm cận đều nhận Ox làm trục đối xứng nên dễ có $MP = NQ$.

b) Gọi $\vec{u}(m\,;n)$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$ là vectơ chỉ phương của Δ và kí hiệu $P = (x_0\,; y_0)$.

Khi đó tồn tại các số t_1, t_2 sao cho $\overrightarrow{PM} = t_1\vec{u}$, $\overrightarrow{PN} = t_2\vec{u}$.

Ta có toạ độ của M và N là : $\begin{cases} x_M = x_0 + t_1 m \\ y_M = y_0 + t_1 n, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_N = x_0 + t_2 m \\ y_N = y_0 + t_2 n. \end{cases}$

M, N thuộc hai tiệm cận của (H) nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình :

$$\frac{(x_0 + tm)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + tn)^2}{b^2} = 0 \text{ hay } \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 m}{a^2} - \frac{y_0 n}{b^2}\right)t + 1 = 0.$$

Rõ ràng $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \neq 0$.

Do đó $\quad t_1.t_2 = \dfrac{1}{\dfrac{m^2}{a^2} - \dfrac{n^2}{b^2}} = \dfrac{a^2b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}$.

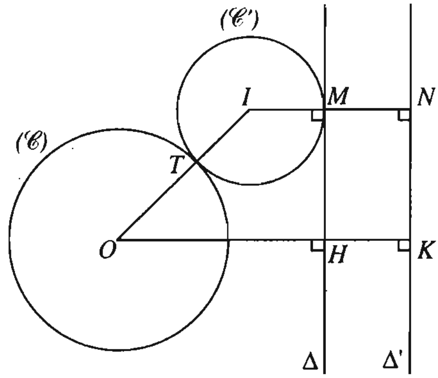
Vậy $\overline{PM}.\overline{PN} = \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} = t_1.t_2.\vec{u}^2 = \dfrac{a^2.b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}\cdot(m^2 + n^2)$ không đổi.

§7. Đường parabol

84. (h. 119) Kẻ OH vuông góc với Δ và kéo dài OH (về phía H) một đoạn $HK = R$.

Dựng đường thẳng Δ' đi qua K và song song với Δ. Khi đó Δ' cố định và không đi qua O.

Xét đường tròn $(\mathscr{C}')$ tâm I tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C})$ tại T và tiếp xúc với Δ tại M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng IM và Δ'.



Hình 119

Ta có : $IO = OT + TI = R + IM$

$$= IN = d(I\,;\,\Delta').$$

Vậy I nằm trên parabol nhận O làm tiêu điểm và Δ' làm đường chuẩn.

85. a) Phương trình có dạng : $y^2 = 2px$ với $2p = 4$. Suy ra $p = 2$. Vậy parabol có : tham số tiêu $p = 2$, đỉnh $O(0\,;\,0)$, tiêu điểm $F(1\,;\,0)$, đường chuẩn $\Delta : x = -1$.

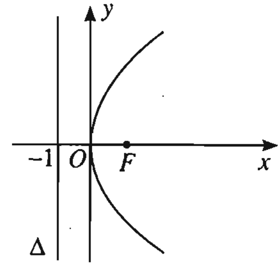
Parabol được vẽ như hình 120.

b) $2y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}x.$

$2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Parabol có : đỉnh $O(0\,;\,0)$, tiêu điểm $F\left(\frac{1}{8}\,;\,0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{1}{8}$.

c) $5y^2 = 12x \Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{5}x.$

$2p = \frac{12}{5} \Rightarrow p = \frac{6}{5}$. Parabol có : đỉnh $O(0\,;\,0)$, tiêu điểm $F\left(\frac{3}{5}\,;\,0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{3}{5}$.



Hình 120

d) $2p = \alpha \Rightarrow p = \dfrac{\alpha}{2}$. Parabol có : đỉnh $O(0 ; 0)$, tiêu điểm $F\left(\dfrac{\alpha}{4} ; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\dfrac{\alpha}{4}$ với $\alpha > 0$.

86. Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px \quad (p > 0)$.

a) $F(1 ; 0)$ là tiêu điểm $\Rightarrow \dfrac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$.

Phương trình của (P) là $y^2 = 4x$.

b) $y^2 = 10x$; c) $y^2 = 8x$.

d) Từ giả thiết và do (P) nhận Ox là trục đối xứng, nên (P) đi qua điểm $(1 ; 4)$. Suy ra $p = 8$. Phương trình của (P) là $y^2 = 16x$.

87. a) Kí hiệu (P) là parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

$M(x ; y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M ; \Delta) \Leftrightarrow MF^2 = d^2(M ; \Delta)$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 9 = 0.$$

Vậy (P) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 9 = 0$.

b) Xét điểm tuỳ ý $M(x ; y) \in (P)$, hãy biến đổi điều kiện $MF = d(M ; \Delta)$ qua toạ độ, dẫn đến phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

88. Phương trình các cạnh của tam giác là : $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$, $x - 5 = 0$.

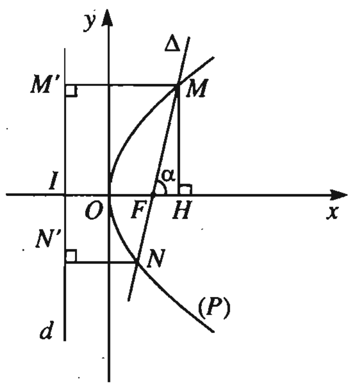
89. (h. 121) Gọi H, M' thứ tự là hình chiếu của M trên Ox và đường chuẩn d của parabol (P), còn I là giao điểm của Ox và d. Ta có :

$MF = MM' = IH$.

$\overline{IH} = \overline{IF} + \overline{FH} \Rightarrow IH = p + \overrightarrow{FM}.\vec{i}$

$= p + MF\cos\alpha$

$\Rightarrow MF = \dfrac{p}{1 - \cos\alpha}$.



Hình 121

Do $(\overrightarrow{FN}, \vec{i}) = 180^o - \alpha$ nên tương tự như trên, ta cũng có

$$NF = \frac{p}{1 - \cos(180^o - \alpha)} = \frac{p}{1 + \cos\alpha}.$$

b) $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{1 - \cos\alpha}{p} + \frac{1 + \cos\alpha}{p} = \frac{2}{p}$ không đổi.

c) $FM.FN = \frac{p}{1 - \cos\alpha} \cdot \frac{p}{1 + \cos\alpha} = \frac{p^2}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{p^2}{\sin^2\alpha}.$

$FM.FN$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \Delta \perp Ox$.

90. (h. 122) Gọi I là trung điểm của MN còn M', I', N' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, I, N trên Δ. Khi đó

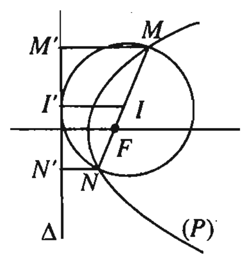
$$II' = \frac{1}{2}(MM' + NN') = \frac{1}{2}(MF + NF) \quad (1)$$

(do $M, N \in (P)$).

Vì đường tròn đường kính MN (tâm là I) tiếp xúc với Δ nên

$$II' = \frac{1}{2}MN. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN = MF + NF$. Vậy M, F, N thẳng hàng.



Hình 122

91. (h. 123) Phương trình đường thẳng $AB : x - 2y - 3 = 0$.

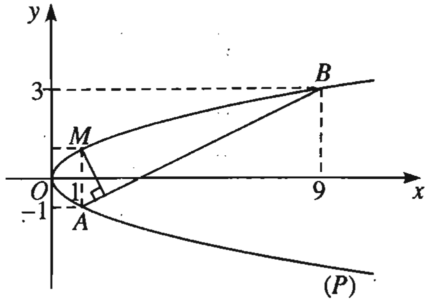
Vì $M(x\,;y)$ nằm trên cung AB của (P) nên $-1 \le y \le 3$.

Ta có : $S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.d(M\,;AB) = \frac{1}{2}.\sqrt{(9-1)^2 + (3+1)^2}.\frac{|x - 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$

$$= 2|x - 2y - 3| = 2|y^2 - 2y - 3|.$$

Ta có $f(y) = y^2 - 2y - 3 = (y-1)^2 - 4 \ge -4$.

Suy ra $f(y)$ nhỏ nhất bằng -4 khi và chỉ khi $y = 1$. Mặt khác, $f(-1) = f(3) = 0$. Do đó trên đoạn $[-1 ; 3]$, hàm số $\left|y^2 - 2y - 3\right|$ lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi $y = 1$. Vậy S_{MAB} lớn nhất bằng 8 khi và chỉ khi $M = (1 ; 1)$.

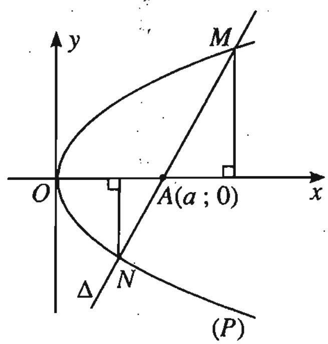


Hình 123

92. (h. 124) Chọn hệ trục toạ độ Oxy thích hợp sao cho parabol (P) có phương trình : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và $A = (a ; 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình : $\alpha(x - a) + \beta y = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Khi đó tung độ các giao điểm của đường thẳng Δ và (P) là nghiệm của phương trình :



Hình 124

$$\alpha \cdot \frac{y^2}{2p} + \beta y - \alpha a = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha y^2 + 2p\beta y - 2p\alpha a = 0 \qquad (1).$$

Rõ ràng $\alpha \neq 0$, vì nếu $\alpha = 0$ thì đường thẳng Δ trùng với trục hoành và chỉ cắt (P) tại một điểm.

Do đó $|y_M| \cdot |y_N| = |y_M \cdot y_N| = \left|-\frac{2p\alpha a}{\alpha}\right| = 2p|a|$.

93. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O trùng A, AB nằm trên tia Ox, AD nằm trên tia Oy. Đặt $AB = a$, $AD = b$. Hãy tìm toạ độ của I_k và chứng minh I_k nằm trên parabol có phương trình dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$.

§8. Ba đường cônic

94. a) Đây là elip có $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$, ta có các tiêu điểm : $F_1 = (-2 ; 0)$, $F_2 = (2 ; 0)$; các đường chuẩn : $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm 4$.

b) Đây là hypebol có $c^2 = a^2 + b^2 = 35 \Rightarrow c = \sqrt{35}$, ta có các tiêu điểm : $F_1 = (-\sqrt{35}\,;0)$, $F_2 = (\sqrt{35}\,;0)$; các đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{15}{\sqrt{35}}$.

c) Đây là parabol có $p = 3$, ta có tiêu điểm $F = \left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$; đường chuẩn : $x = -\dfrac{3}{2}$.

95. a) Gọi $M(x\,;y)$ thuộc cônic. Khi đó $MF = e.d(M\,;\Delta) \Leftrightarrow MF^2 = e^2.d^2(M\,;\Delta)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 - 6x - 2y + 10 = 0.$

b) $x^2 + \dfrac{3}{4}y^2 + 2x - 8y + 17 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 10y - 29 = 0.$

d) $2x^2 - 7y^2 + 12xy + 24x + 32y + 62 = 0.$

96. (h. 125) Xét hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (H) có :

Các tiêu điểm : $F_1(-c\,;0), F_2(c\,;0)$.

Các đường chuẩn :

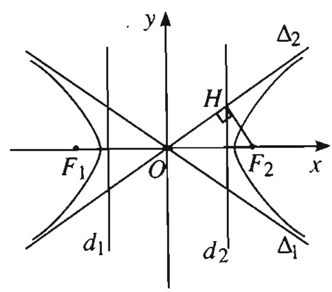
$$d_1 : x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c},$$

$$d_2 : x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

Các tiệm cận :

$$\Delta_1 : y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

$$\Delta_2 : y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$



Hình 125

Gọi $H = d_2 \cap \Delta_2$. Suy ra toạ độ của H bằng $\left(\dfrac{a^2}{c}\,;\dfrac{ab}{c}\right)$.

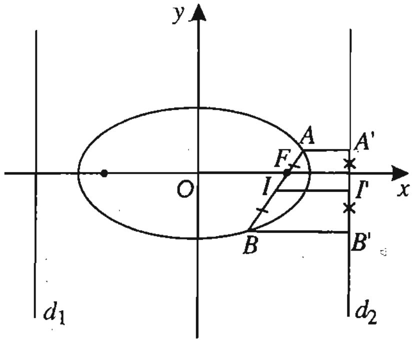
Do đó $\overrightarrow{OH} = \left(\dfrac{a^2}{c}\,;\dfrac{ab}{c}\right)$; $\overrightarrow{HF_2} = \left(c - \dfrac{a^2}{c}; -\dfrac{ab}{c}\right)$.

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{HF_2} = \frac{a^2}{c}\left(c - \frac{a^2}{c}\right) + \frac{ab}{c}.\left(-\frac{ab}{c}\right)$$

$$= a^2 - \frac{a^4}{c^2} - \frac{a^2b^2}{c^2} = a^2 - \frac{a^2}{c^2}(a^2 + b^2) = a^2 - \frac{a^2}{c^2}.c^2 = 0.$$

Vậy $OH \perp F_2H$. Do (H) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng và Δ_1, Δ_2 cũng nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên ta suy ra điều cần chứng minh.

97. (h. 126) Gọi I là trung điểm của AB ; A', B', I' lần lượt là hình chiếu của A, B, I trên đường chuẩn $d_2 : x = \frac{a^2}{c}$.



Hình 126

Ta sẽ chứng minh :

$$II' > \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AA' + BB' > AB.$$

Ta có :

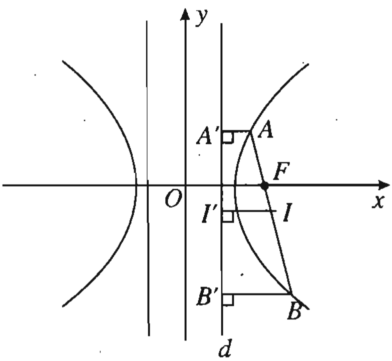
$AB = AF + BF = e.AA' + e.BB'$

$= e(AA' + BB') < AA' + BB' = 2II'$

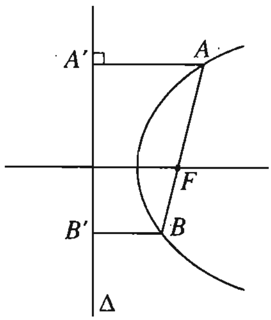
(do $e < 1$). Suy ra điều phải chứng minh.

98. (h. 127) Làm tương tự như bài 97, ta cũng được :

$AB = e(AA' + BB') > AA' + BB' = 2II'$. Vậy đường tròn đường kính AB luôn cắt đường chuẩn $d : x = \frac{a}{e}$.



Hình 127



Hình 128

99. (h. 128) Gọi A', B' thứ tự là hình chiếu của A, B trên đường chuẩn Δ của (P) ; F là tiêu điểm của (P). Ta có : $A, B \in (P) \Rightarrow AF = d(A ; \Delta) = AA'$, $BF = d(B ; \Delta) = BB'$. Suy ra $AF + BF = AA' + BB' = AB$.

Vậy A, B, F thẳng hàng hay AB đi qua F.

Bài tập ôn tập chương III

100. a) $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 + (-1-1)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$;

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2 + (-1-2)^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = \frac{85}{4} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

Các câu b) và c) : Học sinh tự giải.

101. a) Ta có : $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + 1,$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & -m-1 \\ m-1 & -m^2 \end{vmatrix} = 3m^2 - 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -m-1 & m+1 \\ -m^2 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 - m - 1.$$

$D = m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên Δ_1 và Δ_2 luôn cắt nhau và giao điểm K của chúng có toạ độ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + 1}. \end{cases}$$

b) $K \in Oy \Leftrightarrow \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

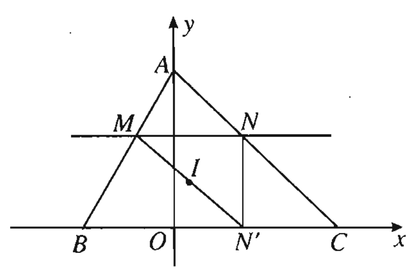
102. (h. 129)

a) Phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Phương trình đường thẳng AC :

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1.$$



Hình 129

Toạ độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ y = m \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} x = b - \dfrac{b}{a}m \\ y = m \end{cases}$$

hay $M = \left(b - \dfrac{b}{a}m \,;\, m\right)$.

Toạ độ của điểm N là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ y = m. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x = c - \dfrac{c}{a}m \\ y = m \end{cases}$ hay $N = \left(c - \dfrac{c}{a}m \,;\, m\right)$.

b) N' có toạ độ $\left(c - \dfrac{c}{a}m \,;\, 0\right)$. Giả sử $I = (x_0 \,;\, y_0)$, khi đó ta có :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{b+c}{2} - \dfrac{b+c}{2a}m \\ y_0 = \dfrac{m}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) chứng tỏ I thuộc đường thẳng có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c}{2} - \dfrac{b+c}{2a}m \\ y = \dfrac{m}{2} \end{cases} \text{ với } m \text{ là tham số} \qquad (2)$$

Vì các giao điểm M và N chỉ tồn tại khi $0 \le m \le a$ nếu $a \ge 0$, hoặc $0 \ge m \ge a$ nếu $a < 0$, nên tập hợp các điểm I là một đoạn thẳng thuộc đường thẳng (2) ứng với m nằm trong đoạn $[0 \,;\, a]$ nếu $a \ge 0$, hoặc $[a \,;\, 0]$ nếu $a < 0$.

103. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(4 \,;\, 3)$, bán kính $R = 2$. Dễ thấy toạ độ của M thoả mãn phương trình của $(\mathscr{C})$ nên M nằm trên $(\mathscr{C})$. Ta cũng viết được phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M là $y - 5 = 0$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C}')$ đối xứng với $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng $\Delta : y = x$ khi $(\mathscr{C}')$ có bán kính bằng 2 và có tâm I' đối xứng với I qua Δ. Ta tìm được $I' = (3 \,;\, 4)$ và viết được phương trình của $(\mathscr{C}')$ là $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

104. (h. 130) Giả sử $T_1 = (x_1\ ;\ y_1), T_2 = (x_2\ ;\ y_2)$. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0\ ;\ 0)$, bán kính R. Phương trình tiếp tuyến MT_1 có dạng $x_1x + y_1y = R^2$ và tiếp tuyến MT_2 có dạng

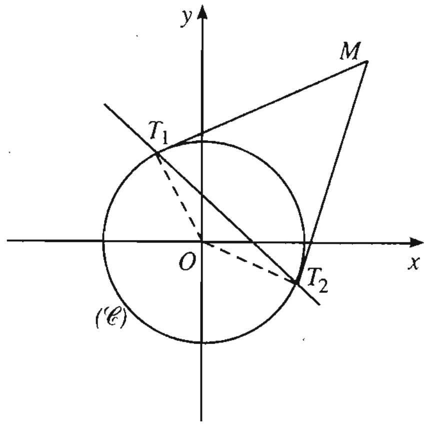
$$x_2x + y_2y = R^2.$$

$$M \in MT_1, M \in MT_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = R^2 \\ x_2x_0 + y_2y_0 = R^2. \end{cases}$$

Suy ra $(x_1\ ;\ y_1)$, $(x_2\ ;\ y_2)$ là các nghiệm của phương trình $x_0x + y_0y = R^2$. (1)

Vì M nằm ngoài $(\mathscr{C})$ nên $x_0^2 + y_0^2 > 0$, do đó (1) là phương trình đường thẳng.

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là $x_0x + y_0y - R^2 = 0$.



Hình 130

b) • Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng : $x = a\ \left(|a| > R\right)$. Khi đó $M = (a\ ;\ y_0)$ và phương trình T_1T_2 là $ax + y_0y - R^2 = 0$.

Dễ thấy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $\left(\dfrac{R^2}{a};\ 0\right)$.

• Xét trường hợp đường thẳng d có phương trình dạng $y = kx + m$. Do d không cắt $(\mathscr{C})$ nên $m \neq 0$. Ta có $M = (x_0\ ;\ kx_0 + m)$. Phương trình đường thẳng T_1T_2 là

$$x_0x + (kx_0 + m)y - R^2 = 0 \text{ hay } x_0(x + ky) + my - R^2 = 0.$$

Ta tìm được điểm cố định mà đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua là $\left(\dfrac{-kR^2}{m}; \dfrac{R^2}{m}\right)$.

105. a) Gọi m, n thứ tự là các khoảng cách từ điểm viễn nhật và điểm cận nhật đến Mặt Trời.

Khi đó tâm sai của quỹ đạo Trái Đất là :

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{(a+c)-(a-c)}{a+c+a-c} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{1-\dfrac{n}{m}}{1+\dfrac{n}{m}} = \frac{1-\dfrac{59}{61}}{1+\dfrac{59}{61}} = \frac{1}{60}.$$

b) Theo câu a), ta có $e = \frac{1}{60} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{60} = \frac{c}{93000000} \Rightarrow c = 1550000.$

Khoảng cách gần nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời là :

$$a - c = 91450000 \text{ (dặm)}.$$

Khoảng cách xa nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời là :

$$a + c = 94550000 \text{ (dặm)}.$$

106. (h. 131)

a) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$;

$c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

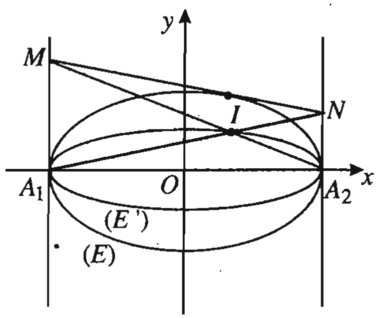
(E) có :

Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\,;0)$, $F_2(\sqrt{3}\,;0)$.

Các đỉnh $A_1(-2\,;\,0)$, $A_2(2\,;\,0)$,

$B_1(0\,;\,-1)$, $B_2(0\,;\,1)$.

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Hình 131

Các đường chuẩn : $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$.

b) • Phương trình đường thẳng A_1N : $nx - 4y + 2n = 0$.

Phương trình đường thẳng A_2M : $mx + 4y - 2m = 0$.

• Toạ độ giao điểm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} nx - 4y + 2n = 0 \\ mx + 4y - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{mn}{m+n} \end{cases}. \text{ Vậy } I = \left(\frac{2(m-n)}{m+n}; \frac{mn}{m+n}\right).$$

c) Phương trình đường thẳng MN : $(n-m)x - 4y + 2(m+n) = 0$.

MN cắt (E) tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} (n-m)x - 4y + 2(m+n) = 0 & (1) \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm.}$$

(1) $\Rightarrow y = \frac{1}{4}[(n-m)x + 2(m+n)]$, thay y vào (2) ta được :

$$x^2 + 4.\frac{1}{16}[(n-m)x + 2(m+n)]^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow [(n-m)^2 + 4]x^2 + 4(n^2 - m^2)x + 4(m+n)^2 - 16 = 0. \quad (3)$$

(3) có một nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 0$ hay

$$4(n^2 - m^2)^2 - [(n-m)^2 + 4].[4(n+m)^2 - 16] = 0$$

$$\Leftrightarrow mn = 1. \quad (4)$$

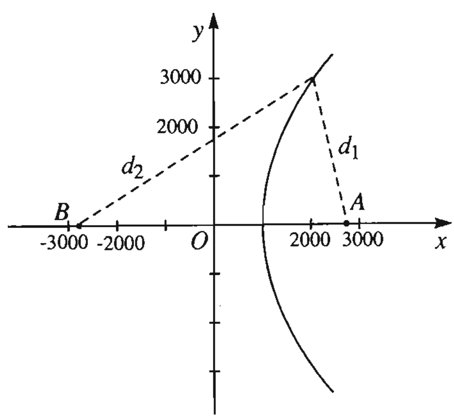
Suy ra toạ độ của I là $\begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} & (5) \\ y = \dfrac{mn}{m+n} = \dfrac{1}{m+n}. & (6) \end{cases}$

(5) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{(m-n)^2}{(m+n)^2} = \dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2}$

(6) $\Rightarrow 4y^2 = \dfrac{4mn}{(m+n)^2}$. Do đó $\dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$. Vậy tập hợp các giao điểm I là elip (E') có phương trình : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

107. Chọn hệ trục toạ độ Oxy mà Ox đi qua A và B, Oy là đường trung trực của AB như hình 132a. Kí hiệu d_1 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị A, d_2 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị B, d_1 và d_2 tính theo feet. Khi đó, do thiết bị A nhận âm thanh nhanh hơn thiết bị B 2 giây nên ta có :

$$d_2 - d_1 = 2200. \quad (1)$$



Hình 132a

Các điểm thoả mãn (1) nằm trên một nhánh của hypebol có phương trình :

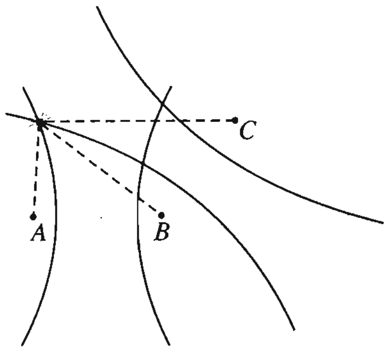
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có : $c = \frac{5280}{2} = 2640$, $a = \frac{2200}{2} = 1100$,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5759600.$$

Vậy vụ nổ nằm trên một nhánh của hypebol có phương trình :

$$\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1.$$



Hình 132b

Nhận xét. Trên đây ta chỉ xác định được một nhánh của hypebol mà trên đó vụ nổ xảy ra, nhưng không biết chính xác vụ nổ xảy ra ở đâu. Tuy nhiên, nếu ta dùng một thiết bị thứ ba C để ghi âm vụ nổ thì ta sẽ xác định được một nhánh của hypebol thứ hai với tiêu điểm là B và C (hoặc A và C). Khi đó vị trí của vụ nổ được xác định tại điểm mà hai nhánh trên cắt nhau (h. 132b).

108. (h. 133)

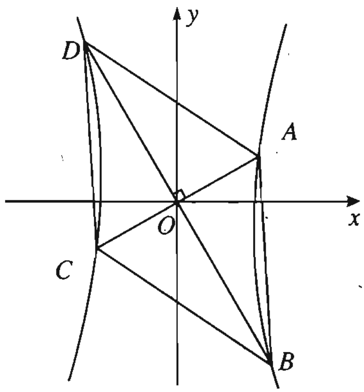
a) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$,

$c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Vậy (H) có các tiêu điểm : $F_1 = (-\sqrt{13}\,;0)$,

$F_2 = (\sqrt{13}\,;0)$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

các đường tiệm cận : $y = \pm\frac{bx}{a} = \pm\frac{3}{2}x$, các đường chuẩn : $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.



Hình 133

b) Từ giả thiết suy ra $\Delta : y = kx$, $\Delta' : y = -\frac{1}{k}x$.

• Hoành độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình :

$$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36. \quad (1)$$

• Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình :

$$9k^2y^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36. \quad (2)$$

Δ cắt (H) khi và chỉ khi (1) có nghiệm, hay $9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}$.

Δ' cắt (H) khi và chỉ khi (2) có nghiệm, hay $9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \frac{2}{3} \\ k < -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) khi và chỉ khi $\begin{cases} -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \\ k < -\frac{2}{3} \text{ hoặc } k > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{2} < k < -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} < k < \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

c) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) $(x_A > 0)$; B và D là các giao điểm của Δ' và (H) $(y_B < 0)$.

Do (H) nhận O làm tâm đối xứng, nên $OA = OC$, $OB = OD$, do đó $ABCD$ là hình bình hành. Lại có AC vuông góc với BD nên $ABCD$ là hình thoi.

Giải hệ các phương trình của Δ và (H) : $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases}$

ta được $A = \left(\frac{6}{\sqrt{9 - 4k^2}} ; \frac{6k}{\sqrt{9 - 4k^2}}\right)$.

Giải hệ các phương trình của Δ' và (H) : $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}$

ta được $B = \left(\frac{6k}{\sqrt{9k^2 - 4}} ; \frac{-6}{\sqrt{9k^2 - 4}}\right)$.

Ta có $S_{ABCD} = 4S_{OAB} = 2OA.OB$.

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{36(k^2 + 1)}{9 - 4k^2} \Rightarrow OA = \frac{6\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{4k^2 - 4}}.$$

$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \frac{36(k^2 + 1)}{9k^2 - 4} \Rightarrow OB = \frac{6\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{9k^2 - 4}}.$$

Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$.

d) Ta có : $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{9-4k^2+9k^2-4}{36(1+k^2)} = \dfrac{5}{36}$.

Vậy $\dfrac{1}{OA^2}\cdot\dfrac{1}{OB^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow OA = OB$.

Mà $\dfrac{1}{OA^2}\cdot\dfrac{1}{OB^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow OA.OB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{ABCD}$ nhỏ nhất.

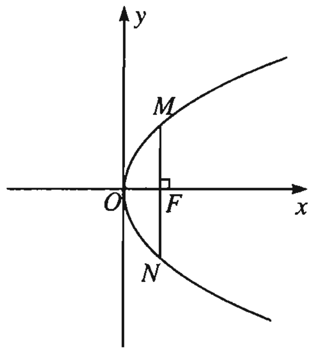
Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 9-4k^2 = 9k^2-4 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Vậy diện tích hình thoi $ABCD$ nhỏ nhất khi các đường thẳng Δ và Δ' là các đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

109. a) (h. 134) Gọi M, N là các giao điểm của (P) và đường thẳng vuông góc với Ox tại F. Khi đó, toạ độ của M, N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y^2 = 2px. \end{cases}$

Hệ có hai nghiệm là $\left(\dfrac{p}{2};p\right)$, $\left(\dfrac{p}{2};-p\right)$.

Vậy $MN = |y_M| + |y_N| = 2p$.



Hình 134

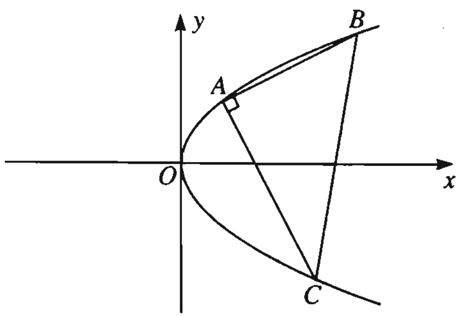
b) (h. 135) Giả sử $A = \left(\dfrac{a^2}{2p};\ a\right)$, $B = \left(\dfrac{b^2}{2p};\ b\right)$, $C = \left(\dfrac{c^2}{2p};\ c\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là

$$2px - (b+c)y + bc = 0. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{b^2-a^2}{2p};\ b-a\right),$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{c^2-a^2}{2p};\ c-a\right).$$



Hình 135

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) + 4p^2(b - a)(c - a) = 0$

$\Leftrightarrow (b + a)(c + a) + 4p^2 = 0 \Leftrightarrow bc + a(b + c) + a^2 + 4p^2 = 0.$ (2)

Rút bc từ (2) và thay vào (1), ta được phương trình của BC là

$$2px - a^2 - 4p^2 - (b + c)(y + a) = 0 \qquad (3)$$

Dễ thấy đường thẳng BC có dạng (3) luôn đi qua điểm cố định $M\left(\frac{a^2}{2p} + 2p\ ; -a\right)$.

Bài tập trắc nghiệm chương III

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (D)
6. (D)	**7.** (A)	**8.** (D)	**9.** (C)	**10.** (A)
11. (B)	**12.** a) (D), b) (C)	**13.** (C)	**14.** (B)	**15.** (C)
16. (D)	**17.** (A)	**18.** (B)	**19.** (D)	**20.** (A)
21. (D)	**22.** (C)	**23.** (B)	**24.** (C)	**25.** (B)
26. (B)	**27.** (A).			

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, $AB = AD = \frac{1}{2}BC = 1$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

a) Biểu thị các vectơ sau đây theo hai vectơ $\vec{b}$ và $\vec{d}$: $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm sao cho $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Chứng minh $AN // CM$ và $BN // DM$.

c) Tính diện tích hai tam giác ANB và DNC.

d) Tính diện tích hình bình hành tạo bởi các đường thẳng AN, CM, BN, DM.

2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $a = b\cos C + c\cos B$;

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$;

c) $h_a = 2R \sin B \sin C$;

d) $bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$;

e) Nếu H là trực tâm tam giác ABC thì :

$$BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2 = AB^2 + HC^2.$$

3. Tam giác ABC có trung tuyến AA_1, đường cao BB_1 và phân giác CC_1 đồng quy. Tìm hệ thức liên hệ giữa ba cạnh của tam giác.

4. Trên các cạnh AC và BC của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{MC} = \frac{NC}{NB} = k$, trên MN lấy điểm P sao cho $\frac{PM}{PN} = k$. Gọi S, S_1 và S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, APM và BPN. Chứng minh $\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}$.

5. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Kẻ đường phân giác AD, biết $b' = DC$, $c' = DB$. Đặt $l = AD$.

a) Tính l theo b, c, b', c'.

b) Tính l theo a, b, c.

6. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một đường thẳng d không cắt đường tròn đó. Một điểm I thay đổi trên d. Kẻ tiếp tuyến IT tới đường tròn với T là tiếp điểm. Gọi (I) là đường tròn tâm I bán kính $r = IT$. Chứng minh rằng các đường tròn (I) luôn luôn đi qua hai điểm cố định khi I thay đổi.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ phụ thuộc vào tham số m, có phương trình lần lượt là :

$$\Delta(m): \quad \sqrt{1-m^2}\,x - my = 0,$$

$$\Delta'(m): \sqrt{1-m^2}\,x - (m+1)y + \sqrt{1-m^2} = 0,$$

trong đó $-1 < m < 1$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng $\Delta(m)$ luôn đi qua một điểm cố định và đường thẳng $\Delta'(m)$ cũng luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm toạ độ giao điểm M của $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

d) Với giá trị nào của m thì góc giữa hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ bằng 60° ?

8. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

a) Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đối xứng với đường tròn $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng $4x - 3y = 0$.

c) Gọi M là điểm có toạ độ $M = (0\ ;\ m)$. Gọi MT và MT' là hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm T và T'. Chứng minh rằng đường thẳng TT' luôn đi qua một điểm cố định.

9. Cho phương trình : $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 4m = 0.$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của một đường tròn trong hệ toạ độ Oxy ?

b) Khi m thay đổi, tìm quỹ tích tâm của các đường tròn (1).

c) Chứng minh rằng các đường tròn (1) luôn đi qua hai điểm cố định.

10. Trong hệ toạ độ Oxy cho bốn điểm $P(3; 2)$, $Q(-3; 2)$, $R(-3; -2)$, $S(3; -2)$.

a) Viết phương trình elip (E) và hypebol (H) cùng có hình chữ nhật cơ sở là $PQRS$.

b) Tìm toạ độ giao điểm của elip (E) với các đường tiệm cận của hypebol (H).

11. Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm $F = (1; 1)$ và d là đường trung trực của đoạn thẳng OF. Viết phương trình đường cônic có tiêu điểm F, đường chuẩn d và có tâm sai lần lượt là :

a) $e = \sqrt{2}$; b) $e = 1$; c) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{d} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = 2\vec{d}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = 2\vec{d} - (\vec{d} - \vec{b}) = \vec{b} + \vec{d}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\vec{d}$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{\vec{b}}{2} - (\vec{b} + 2\vec{d}) = -\frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{d} + \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3} = \frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{3} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}.$$

Vậy $CM // AN$.

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{d} = \frac{\vec{b} - 2\vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \vec{d} - \vec{b} + \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3} = \frac{-2\vec{b} + 4\vec{d}}{3} = -\frac{4}{3}\overline{D}$$

Vậy $DM // BN$.

c) • Gọi φ là góc hợp bởi $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NB}$, ta có $\cos\varphi = \frac{\overline{N}}{\overline{N}}$

Theo câu b) ta có $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \frac{(\vec{b} + 4\vec{d})(-2\vec{b} + 4\vec{d})}{9} = \frac{-2 + 16}{9} = \frac{14}{9}$.

$$NA = \sqrt{\left(\frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3},\ NB = \sqrt{\left(\frac{-2\vec{b} + 4\vec{d}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Suy ra : $\cos\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{85}}$.

Vậy $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \dfrac{6}{\sqrt{85}}$.

Vậy $S_{ANB} = \dfrac{1}{2}NA.NB.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{17}}{3}.\dfrac{\sqrt{20}}{3}.\dfrac{6}{\sqrt{85}} = \dfrac{2}{3}$.

• Theo câu a), ta có góc $CMD = \varphi$.

Theo câu b) ta có $MC = \sqrt{\left(\dfrac{\vec{b} + 4\vec{d}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2},\ MD = \sqrt{\left(\dfrac{-\vec{b} + 2\vec{d}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy : $S_{CMD} = \dfrac{1}{2}MC.MD.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{17}}{2}.\dfrac{\sqrt{5}}{2}.\dfrac{6}{\sqrt{85}} = \dfrac{3}{4}$.

d) Do M là trung điểm của AB nên hình bình hành cũng nhận các trung điểm của NA và NB làm đỉnh. Vậy diện tích hình bình hành đó bằng nửa diện tích tam giác ANB hay bằng $\dfrac{1}{3}$.

2. a) Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Bằng cách nhân hai vế với $\overrightarrow{BC}$ ta được :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow a^2 = ca.\cos B + ba\cos C$$

$$\Leftrightarrow a = b\cos C + c\cos B.$$

b) Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ vào công thức cuối ở câu a), ta được điều cần chứng minh.

c) Ta có $a.h_a = 2S = \dfrac{abc}{2R} = \dfrac{a.2R\sin B.2R\sin C}{2R} \Leftrightarrow h_a = 2R\sin B\sin C$.

d) Chú ý rằng $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ và từ các công thức tương tự, ta có :

$bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C =$

$$= \frac{1}{2}\left[(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + \right.$$

$$\left. + (c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)\right] = 0.$$

e) $BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{BH}^2 - \overrightarrow{HA}^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}\right). \qquad (*)$$

Nếu ta gọi C' là chân đường cao hạ từ C của tam giác ABC thì vectơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ và vectơ $\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}$ có hình chiếu trên đường thẳng BA đều là $\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{C'A}$. Vậy đẳng thức (*) được chứng minh và do đó

$$BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2.$$

Đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

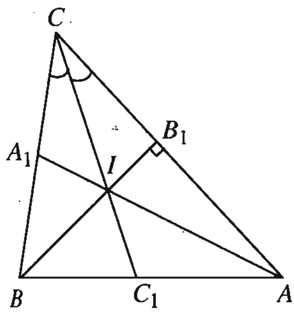
3. (h. 136) Ta đặt : $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$.

Khi đó $|\vec{u}| = CA = b$ và $|\vec{v}| = CB = a$. Giả sử trung tuyến AA_1 cắt phân giác CC_1 tại I, khi đó

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{2b}{a}$$

hay là $a.IA = 2b.IA_1$. Vì I nằm giữa A và A_1 nên $a.\overrightarrow{IA} = -2b.\overrightarrow{IA_1}$

$$\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}\right) = -2b\left(\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CI}\right).$$



Hình 136

Suy ra $\overrightarrow{CI} = \dfrac{a.\overrightarrow{CA} + 2b\overrightarrow{CA_1}}{a + 2b} = \dfrac{a\vec{u} + b\vec{v}}{a + 2b}$.

Do đó ta có

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CB} = \frac{a\vec{u} + b\vec{v}}{a + 2b} - \vec{v} = \frac{a\vec{u} - (a + b)\vec{v}}{a + 2b}.$$

Vì đường cao BB_1 đi qua I nên $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CA} = 0$, hay $\left[a\vec{u} - (a + b)\vec{v}\right].\vec{u} = 0$.

Suy ra :

$$a\vec{u}^2 - (a+b)\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow a.b^2 - (a+b)ab\cos C = 0$$

$$\Rightarrow ab^2 - \frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 0$$

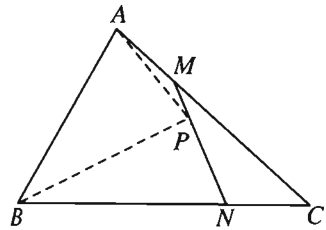
$$\Rightarrow 2ab^2 - a(a^2+b^2-c^2) - b(a^2+b^2-c^2) = 0$$

$$\Rightarrow -a(a^2-b^2-c^2) - b(a^2+b^2-c^2) = 0$$

Vậy ta có liên hệ : $a(-a^2+b^2+c^2) = b(a^2+b^2-c^2)$.

4. (h. 137) Từ giả thiết $\frac{AM}{MC} = k$, ta suy ra :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{k}{k+1} \text{ và } \frac{MC}{AC} = \frac{1}{k+1}.$$



Hình 137

Tương tự như thế :

$$\frac{NC}{BC} = \frac{k}{k+1}, \ \frac{NB}{BC} = \frac{1}{k+1}, \ \frac{PM}{MN} = \frac{k}{k+1},$$

$$\frac{PN}{MN} = \frac{1}{k+1}.$$

Từ đó suy ra :

$$S_1 = S_{APM} = \frac{k}{k+1}S_{AMN} = \frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}S_{ACN}$$

$$= \frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}S_{ABC} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^3 S.$$

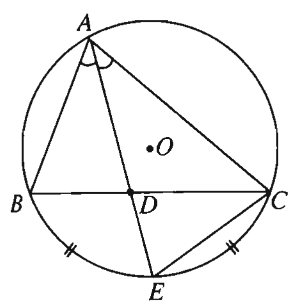
Tính toán tương tự, ta có $S_2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^3 S$.

Vậy

$$\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} = \frac{k}{k+1}\sqrt[3]{S} + \frac{1}{k+1}\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{S}.$$

5. (h. 138) a) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt (O) tại E. Ta có $AD.DE = DB.DC$, tức là :

$$l.DE = b'c'.$$



Hình 138

Dễ thấy hai tam giác AEC và ABD đồng dạng, do đó :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} \text{ hay } bc = l\,(l + DE) = l^2 + l.DE = l^2 + b'c'.$$

Vậy ta có $l^2 = bc - b'c'$ hay $l = \sqrt{bc - b'c'}$.

b) Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

Từ đó, ta có :

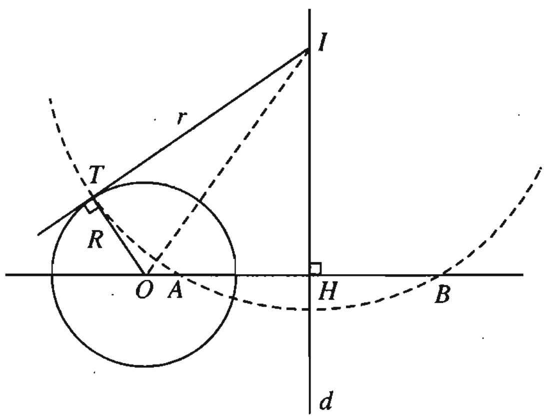
$$\frac{b'}{b' + c'} = \frac{b}{b + c}, \quad \frac{c'}{b' + c'} = \frac{c}{b + c}. \text{ Suy ra } b' = \frac{ab}{b + c}, \quad c' = \frac{ac}{b + c}.$$

Vậy từ câu a), ta có

$$l = \sqrt{bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{bc\left[(b + c)^2 - a^2\right]}}{b + c}.$$

6. (h. 139) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Hai tam giác vuông OHI và OTI có chung cạnh huyền OI, còn $OH > OT = R$ (vì d không cắt (O)). Suy ra $IH < IT$.



Hình 139

Vậy đường thẳng OH cắt đường tròn (I) tại hai điểm A và B nào đó đối xứng với nhau qua d.

Ta có $\overrightarrow{OT}^2 = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$

$\Leftrightarrow R^2 = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{HA}) = OH^2 - HA^2.$

Bởi vậy, nếu đặt $OH = h$ thì $HA = HB = \sqrt{h^2 - R^2}$. Suy ra (I) đi qua hai điểm A, B cố định.

7. a) Hiển nhiên đường thẳng $\Delta(m)$ luôn luôn đi qua gốc toạ độ O. Phương trình của $\Delta'(m)$ có thể viết dưới dạng : $\sqrt{1-m^2}(x+1)-(m+1)y=0$, nên $\Delta'(m)$ luôn đi qua điểm $(-1\ ;\ 0)$.

b) Giải hệ
$$\begin{cases}\sqrt{1-m^2}x-my=0\\ \sqrt{1-m^2}x-(m+1)y+\sqrt{1-m^2}=0\end{cases}$$

ta được giao điểm M có toạ độ $x=m$ và $y=\sqrt{1-m^2}$.

c) Theo câu b), toạ độ $(x\ ;\ y)$ của M thoả mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Vậy M luôn nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$.

d) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ thì :

$$\cos\varphi=\frac{\left|\left(\sqrt{1-m^2}\right)^2+m(m+1)\right|}{\sqrt{(1-m^2)+m^2}.\sqrt{(1-m^2)+(m+1)^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{2(m+1)}}=\sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

$$\varphi=60^\circ\Leftrightarrow\cos\varphi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{m+1}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$.

8. a) Tâm đường tròn là $I(2\ ;\ 0)$, bán kính $R=1$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C}')$ có bán kính bằng 1 và có tâm I' là điểm đối xứng với I qua đường thẳng $d: 4x-3y=0$. Giả sử $I'=(x\ ;\ y)$ thì vectơ $\overrightarrow{II'}=(x-2\ ;y)$ phải vuông góc với vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3\ ;4)$, tức là $3(x-2)+4y=0$, hay $3x+4y-6=0$. (1)

Ngoài ra trung điểm của II' là $P=\left(\dfrac{x+2}{2};\dfrac{y}{2}\right)$ phải nằm trên d, tức là :

$$\frac{4(x+2)}{2}-\frac{3y}{2}=0\quad\text{hay } 4x-3y+8=0. \qquad (2)$$

Giải hệ hai phương trình (1) và (2) ta được toạ độ I' là $x = -\frac{14}{25}$, $y = \frac{48}{25}$.

Vậy phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ là $\left(x + \frac{14}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{48}{25}\right)^2 = 1$.

c) Hiển nhiên hai tiếp điểm T và T' đều nằm trên đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ có đường kính là MI. Đường tròn đó có tâm là trung điểm Q của MI, $Q = \left(1; \frac{m}{2}\right)$ và có bán kính $r = QI = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}}$. Vậy $(\mathscr{C}_1)$ có phương trình :

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = 1 + \frac{m^2}{4} \text{ hay } x^2 + y^2 - 2x - my = 0.$$

Hai tiếp điểm T và T' là giao điểm của hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}_1)$ nên toạ độ của chúng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - my = 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên, ta suy ra $2x - my - 3 = 0$. (*)

Toạ độ của T và T' là các nghiệm của hệ phương trình trên nên cũng là nghiệm của phương trình (*). Suy ra (*) chính là phương trình của đường thẳng TT'. Đường thẳng đó luôn đi qua điểm cố định $S\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

9. a) Viết (1) dưới dạng :

$$(x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = m^2 + (m + 1)^2 - 4m = m^2 + (m - 1)^2.$$

Vì $m^2 + (m - 1)^2 > 0$,

với mọi m nên (1) là phương trình đường tròn với mọi m.

b) Tâm I của đường tròn (1) có toạ độ : $x = m$; $y = m + 1$. Suy ra quỹ tích các điểm I là đường thẳng có phương trình $y = x + 1$.

c) Ta tìm cặp số $(x_0 ; y_0)$ sao cho $x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2(m + 1)y_0 + 4m = 0$ với mọi m.

Biến đổi đẳng thức trên ta có : $2m(2 - x_0 - y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 = 0$ với mọi m.

Từ đó suy ra : $2 - x_0 - y_0 = 0$ và ${x_0}^2 + {y_0}^2 - 2y_0 = 0$. Giải ra ta có hai cặp số (1 ; 1) và (0 ; 2) là nghiệm. Vậy đường tròn (1) luôn đi qua hai điểm cố định $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$.

10. a) Trục lớn của (E) là $2a = PQ = 6$, và trục bé là $2b = QR = 4$. Vậy $a = 3$, $b = 2$. Elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tương tự (H) có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình chung là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$.

Giải hệ gồm hai phương trình (của (E) và của hai đường tiệm cận), ta tìm được toạ độ của bốn giao điểm là

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right); \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right).$$

11. Đường trung trực d của OF cố nhiên đi qua điểm (0 ; 1) và (1 ; 0) nên d có phương trình $x + y - 1 = 0$. Với mọi điểm $M(x ; y)$, gọi MH là khoảng cách từ M đến d thì $MH = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$ và khoảng cách từ M đến F là $MF = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

a) Cônic có tâm sai $e = \sqrt{2}$ là một hypebol. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = \sqrt{2} \Leftrightarrow MF^2 = 2MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+y-1)^2 \Leftrightarrow 2xy = 1.$$

Vậy hypebol đó có phương trình $2xy = 1$, hay cũng có thể viết $y = \frac{1}{2x}$. Đó là hypebol đã biết ở cấp Trung học cơ sở.

b) Cônic có tâm sai $e = 1$ là một parabol. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0.$$

Parabol có phương trình là $(x-y)^2 - 2(x+y) + 3 = 0$.

c) Cônic có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là đường elip. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = (x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 2xy - 6(x+y) + 7 = 0.$$

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP - PHAN THỊ MINH NGUYỆT**
Biên tập tái bản : **PHAN THỊ MINH NGUYỆT**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **PHAN THỊ MINH NGUYỆT**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 (NÂNG CAO)
Mã số : NB004T1

In 10.000 cuốn (QĐ08BT/KH11) khổ 17 x 24 cm,
tại Công ti cổ phần in Nam Định.
Số in: 17. Số xuất bản: 01-2011/CXB/851-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2011.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON QUALITY CROWN QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH BÀI TẬP LỚP 10

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 10
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
5. BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
6. BÀI TẬP TIN HỌC 10
7. BÀI TẬP TIẾNG ANH 10
8. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 10
9. BÀI TẬP TIẾNG NGA 10

SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- BÀI TẬP VẬT LÍ 10
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 10

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.

– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.

– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.

– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.

– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn

8934994023955

Giá: 11.300đ